НАЦИОНАЛНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ „АКАД. Л. ЧАКАЛОВ”

ТЕМА
за вътрешен профилиращ изпит по математика за прием на ученици след 7. клас в НПМГ „Акад. Л. Чакалов”
02.06.2013 г.

Вариант 2

Примерни решения:

Задача 1. Решете уравнението $\dfrac{x(x+3)}{2}=x-\dfrac{(3x-1)(2-x)}{6}$.

Решение:

$3x(x+3)=6x-(3x-1)(2-x)$

$3x^2+9x=6x-(6x-3x^2-2+x)$

$\cancel{3x^2}+9x=\cancel{6x}-\cancel{6x}+\cancel{3x^2}+2-x$

$10x=2$

$x=\dfrac{1}{5}$

Задача 2. Решете уравнението $\left|4-|x|\right|=A$, където $A=\dfrac{(-2)^{2013}+5.2^{2012}}{2^{2011}+4^{1005}}$.

Решение:

$A=\dfrac{-2^{2013}+5.2^{2012}}{2^{2011}+2^{2010}}=\dfrac{2^{\cancel{2012}}.(-2+5)}{\cancel{2^{2010}}.(2+1)}=4.$

С получената стойност на A решаваме уравнението $\left|4-|x|\right|=4$. Имаме, че:

$4-|x|=4$ или $4-|x|=-4$.

I сл. $|x|=0$

$x_1=0$

II сл. $|x|=8$

$x_2=8$ $\quad x_3=-8$

Задача 3. Намерете най-малкото цяло число, което е решение на неравенството

$(2-x)^3-x(3-x)(3+x)-\dfrac{2(3x+1)^2+1}{3}<27.$

Решение:

$$\left(2-x\right)^3 - x\left(3-x\right)\left(3+x\right) - \frac{2\left(3x+1\right)^2+1}{3} < 27$$

$$8-12x+6x^2-x^3-9x+x^3-\frac{18x^2+12x+3}{3}<27$$

$$8-21x+6x^2-6x^2-4x-1<27$$

$$-25x+7<27$$

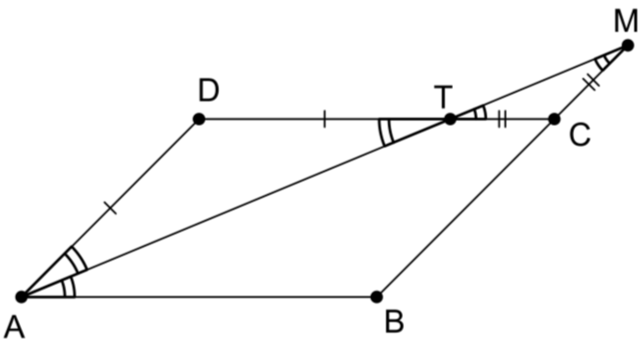
$$-25x<20$$

$$x>-\frac{4}{5}$$

Следователно най-малкото цяло число, което е решение на неравенството е 0.

Задача 4. Даден е успоредник $ABCD$. Ъглополовящата на $\sphericalangle DAB$ пресича страната CD в точка T и продължението на страната BC в точка M. Ако $DT = 5$см и $CM = 2$см, намерете периметъра на $ABCD$.

Решение:



Нека $\sphericalangle BAT = \sphericalangle DAT = \alpha$, тогава от $AB \parallel CD$, пресечени с AT, получаваме $\sphericalangle BAT = \sphericalangle ATD = \alpha$ (кръстни ъгли).
Тъй като $\triangle ADT$ е равнобедрен, то $AD = DT = 5$ см.
От $\sphericalangle CTM = \sphericalangle ATD = \alpha$ (връхни ъгли) и $\sphericalangle DAT = \sphericalangle BMA = \alpha$ (кръстни ъгли) следва, че $\triangle TCM$ е равнобедрен, т.е. $TC = CM = 2$ см.
Така $P_{ABCD} = 2.5 + 2.7 = 24$ см.

Задача 5. За да изоре дадена площ в определен срок, един тракторист трябвало да изорава по 20 декара на ден. Той решил да изорава с 20% повече от определената норма и в резултат на това 3 дни преди определеното време изорал $\frac{4}{5}$ от цялата площ. Да се намери колко декара е цялата площ.

Решение:

Нека определеното време по план е x , тогава времето в действителност е $x-3$ $\left(\text{Д.С. } x>3\right)$. Тъй като нормата в действителност е 24 декара на ден , то работата, която е свършена в действителност е $24\left(x-3\right)$, а работата по план е $20x$.

Така съставяме уравнението:

$$24\left(x-3\right) = \frac{4}{5}.20x$$

$$120\left(x-3\right) = 80x$$

$$40x = 360$$

$x = 9$ дни

Следователно цялата площ е $20.9 = 180$ декара.

Задача 6. Даден е $\triangle ABC$, в който $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. През средата M на AC е построен перпендикуляр към AC, който пресича AB в точка P така, че $\sphericalangle ACP : \sphericalangle PCB = 3:2$. Ако $BP = 3$см, намерете дължината на страната BC.

Решение:

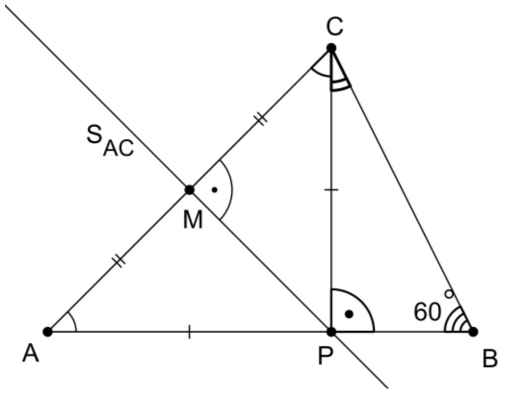
Нека $\sphericalangle ACP = 3\alpha$, а $\sphericalangle PCB = 2\alpha$.

Тъй като точка $P \in S_{AC}$, то $AP = PC$ и $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PCA = 3\alpha$.

От теоремата за сбор на ъглите в $\triangle ABC$ имаме, че $8\alpha + 60^\circ = 180^\circ$, т.е. $\alpha = 15^\circ$.

Тогава $\sphericalangle BCP = 30^\circ$ и $\sphericalangle BPC = 90^\circ$.

От правоъгълния $\triangle BPC$ с $\sphericalangle BCP = 30^\circ$ имаме, че $BC = 2.BP = 6$ см.



Задача 7. Решете уравнението

$\left(1-2a\right)^2 x - a^2\left(4x-5\right) = 0$, където a е параметър. Намерете за кои стойности на a то има положителен корен.

Решение:

$$\left(1-4a+4a^2\right)x - 4a^2x + 5a^2 = 0$$

$$x - 4ax + \cancel{4a^2x} - \cancel{4a^2x} + 5a^2 = 0$$

$$\left(1-4a\right)x = -5a^2$$

При $a \neq \frac{1}{4}$, $x = \frac{5a^2}{4a-1}$.

При $a = \frac{1}{4}$, $0.x = -\frac{5}{16}$, т.е. уравнението няма решение.

Уравнението има положителен корен, когато $x = \frac{5a^2}{4a-1} > 0$, т.е. при $4a-1 > 0$ и $a \neq 0$.

Следователно търсените стойности са $a > \frac{1}{4}$.

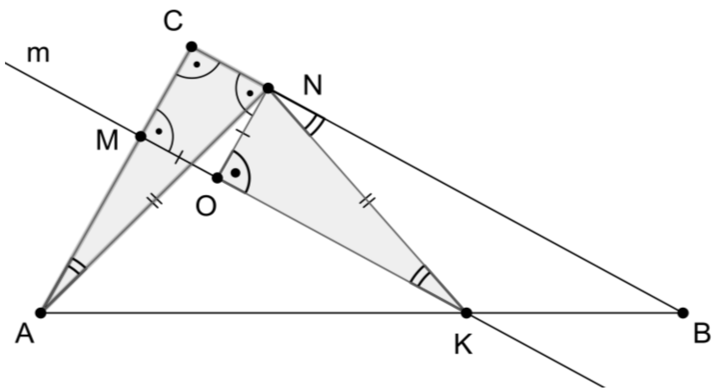
Задача 8. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ $\left(\sphericalangle C = 90^\circ\right)$ и точка O е вътрешна за триъгълника. През точката O е построена права $m \parallel BC$, която пресича AC в точка M и AB в точка K. Ако $ON \perp BC\left(N \in BC\right)$, $\sphericalangle CAN = \sphericalangle BNK$ и $OM = ON$, намерете ъглите на $\triangle ANK$.

Решение:

От $m \parallel BC$, пресечени с AC, получаваме $\sphericalangle CMO = 90^\circ$. Тъй като $\sphericalangle MCN = \sphericalangle ONC = \sphericalangle OMC = 90^\circ$, то $MONC$ е правоъгълник, но по условие $MO = NO$, т.е. $MONC$ е квадрат и $CN = CM$.

От $m \parallel BC$, пресечено с NK, получаваме $\sphericalangle OKN = \sphericalangle KNB = \alpha$ (кръстни ъгли).

От теоремата за сбор на ъглите в $\triangle ANC$ имаме, че $\sphericalangle ANC = 90^\circ - \alpha$, т.е. $\sphericalangle ANK = 90^\circ$.



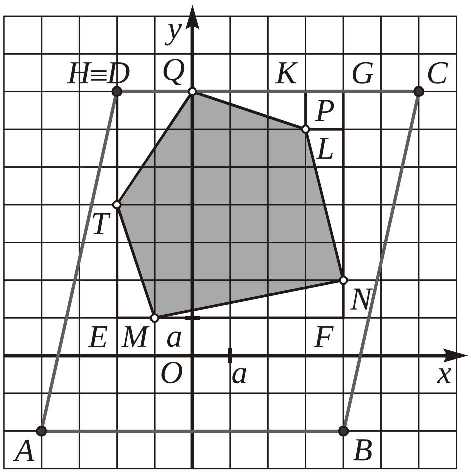
Разглеждаме $\triangle ACN$ и $\triangle KON$

1) $ON = CN$
2) $\sphericalangle CAN = \sphericalangle OKN = \alpha$

3) $\sphericalangle ACN = \sphericalangle KON = 90^\circ$.

Следователно по втори признак за еднаквост на триъгълници $\triangle ACN \cong \triangle KON$. Тогава $AN = NK$ и $\triangle ANK$ е равнобедрен правоъгълен триъгълник, т.е. $\sphericalangle NAK = \sphericalangle NKA = 45^\circ$.

Задача 9. В координатна система с единична отсечка a см са дадени точките M, N, P, Q и T, както е показано на чертежа. Лицето на петоъгълника $MNPQT$ е 98 см^2. Намерете a и пресметнете лицето на четириъгълника, чиито върхове са точките $A(-4a;-2a)$, $B(4a;-2a)$, $C(6a;7a)$ и $D(-2a;7a)$.



Решение:

Нека „опаковаме" петоъгълника $MNPQT$ с квадрата $EFGH$, както е показано на чертежа. Тогава за можем да изразим лицето на петоъгълника.

$$S_{MNPQT} = S_{EFGH} - \left(S_{TEM} + S_{MNF} + S_{NLP} + S_{PLGK} + S_{KPQ} + S_{QTH}\right)$$

$$= 36a^2 - \left(\frac{3a^2}{2} + \frac{5a^2}{2} + \frac{4a^2}{2} + a^2 + \frac{3a^2}{2} + \frac{6a^2}{2}\right) = 36a^2 - \frac{23a^2}{2} = \frac{49a^2}{2}.$$

Тогава от $\frac{49a^2}{2} = 98$ получаваме, че $a^2 = 4$, т.е. $a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(a+2) = 0$, но a е дължина на отсечка и затова $a = 2$ см.

Точките A и B, както точките C и D, имат еднакви ординати, затова отсечките AB и CD са успоредни на абсцисната ос. За дължините им намираме, че $AB = CD = 8a$.

Следователно четириъгълникът $ABCD$ е успоредник и лицето му е $8a.9a = 72a^2$. При намерената стойност $a = 2$ см, това лице е 288 см^2.

Задача 10. Ако x, y и z са цели положителни числа такива, че $x < y < z$ и $x^3 + x^2z + x^2y + xyz + x^2 + xz + yz + xy = 2013$, намерете x, y и z.

Решение:

Разлагаме лявата страна на уравнението на множители и получаваме:

$$x^2(x+z) + xy(x+z) + x(x+z) + y(x+z) = 2013$$

$$x(x+z)(x+y) + (x+z)(x+y) = 2013$$

$$(x+1)(x+y)(x+z) = 3.11.61$$

Тъй като $1 \le x < y < z$ по условие, то $x+1 < x+y < x+z$.

Следователно уравнението има решение, когато $x+1 = 3$, т.е. $x = 2$ и $x+y = 11$, т.е. $y = 9$ и $x+z = 61$, т.е. $z = 59$.