XXI МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ „РИКИ”

27 април 2014г.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

Задача 1. Да се реши уравнението $\left|(3x-2)^2-(3x+2)^2\right|=\dfrac{3^n+2.3^{n+1}}{3^{n-1}}+3$, където n е естествено число.

Решение:

$$\left|(3x-2)^2-(3x+2)^2\right|=\frac{3^n+2.3^{n+1}}{3^{n-1}}+3 \Leftrightarrow \left|9x^2-12x+4-9x^2-12x-4\right|=\frac{3^n(1+2.3)}{3^{n-1}}+3 \Leftrightarrow$$

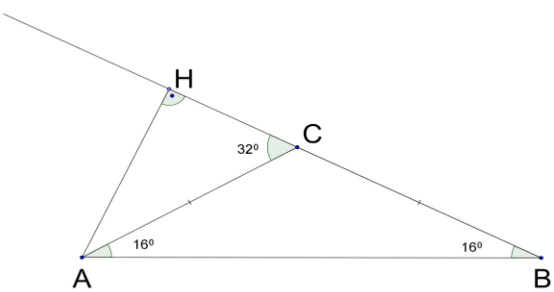
$$|-24x|=3.7+3 \Leftrightarrow |-24x|=24 \Leftrightarrow -24x=24 \quad \textit{или} \quad -24x=-24 \Leftrightarrow x=-1 \quad \textit{или} \quad x=1.$$

Задача 2. Един от външните ъгли на равнобедрен триъгълник е 32^o. Намерете ъгъла между основата на този триъгълник и височината на триъгълника, прекарана през връх при основата му.

Решение:

Даденият външен ъгъл не е при основата (ако допуснем, че даденият външен ъгъл е при основата: щом външният ъгъл е остър, то съседният му е тъп и тогава ъглите при основата на триъгълника са тъпи ъгли – противоречие).

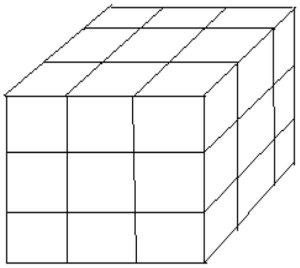
От теорема за външен ъгъл следва, че ъглите при основата на триъгълника са по 16^o. Височината към бедрото е външна за триъгълника ABC. Тогава от ΔABH : $\angle HAB=90^o-16^o=74^o$.



Задача 3. Куб е съставен от 27 еднакви бели кубчета и после е боядисан в черно. След това е разглобен на съставните си 27 кубчета. Колко от тях имат повече от една черна стена?

Решение:

Кубчетата по ъглите на куба са с по 3 черни стени и те са 8. Кубчетата по ръбовете но в средата са с по 2 черни стени и те са 3.4=12. Поне две черни стени имат 20 кубчета. (Централните кубчета на всяка стена имат по една черна стена и те са 6 на брой. Централното кубче за куба – в центъра на куба – няма черни стени.)

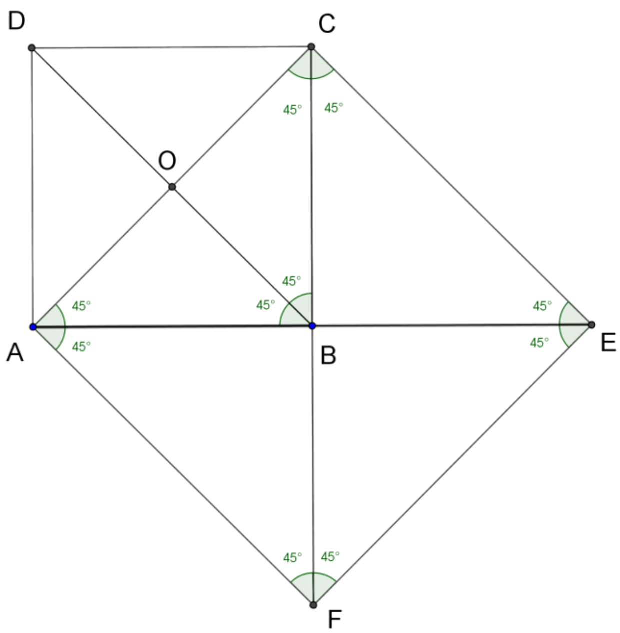


Задача 4. Диагоналът на квадрат с лице 1 cm^2 е страна на втори квадрат. Диагоналът на втория квадрат е страна на трети квадрат и т. н. Намерете колко квадратни сантиметра е лицето на петия квадрат.

Решение:

Нека разгледаме първия и втория квадрат. Всеки от диагоналите на първия квадрат го разделя на два еднакви равнобедрени правоъгълни триъгълника (І ПЕТ), т.е. диагоналите сключват ъгъл 45ºсъс страните на квадрата.Същото важи и за втория квадрат AFEC със страна AC. Следователно $\angle BCE = 45^\circ$ и $\Delta BEC \cong \Delta BAC$ (І ПЕТ). Тогава S_{AEC} = $2S_{ABC}$ = $S_{ABCD,}$ откъдето: S_{AFEC} = $2S_{ABCD.}$ Оттам за лицата на така построените квадрати получаваме:

$S_1 = 1 \qquad S_2 = 2.S_1 = 2 \qquad S_3 = 2.S_2 = 4 \qquad S_4 = 2.S_3 = 8 \qquad S_5 = 2.S_4 = 16cm^2$



Задача 5. За коя стойност на m неравенството $(x-m)^2 - x(m+x-4) > (m-2)(m+2)$ има за решение всяко число?

Решение:

$(x-m)^2 - x(m+x-4) > (m-2)(m+2) \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - xm - x^2 + 4x > m^2 - 4 \Leftrightarrow$

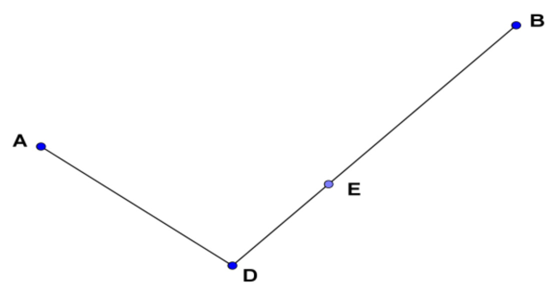
$-3mx + 4x > -4 \Leftrightarrow (4-3m)x > -4$

Дясната страна на неравенството (-4) е отрицателно число и за да е изпълнено за всяко x трябва $4 - 3m = 0$, т.е. $m = \dfrac{4}{3}$.

Задача 6. Разстоянието между две селища А и В, разположени на противоположните склонове на долина, е 5 км. Пътят от А към В първоначално се спуска надолу, а после се изкачва нагоре. Петър тръгнал от А към В, като се движел с постоянна скорост и слизал в продължение на 20 минути. При изкачването скоростта му останала постоянна, но с 2 км/ч по-малка от тази при спускането, и той стигнал в В един час и пет минути след тръгването си от А. В момента на тръгването на Петър, Иван тръгнал от В към А, като се спускал и изкачвал със същата скорост, с която се спускал и съответно изкачвал Петър. Намерете скоростите на спускане и изкачване, както и колко минути ще изминат от момента на тръгването на Петър и Иван до момента на срещата им.

Решение:

Нека $V_{сп} = x$ km/h , тогава $V_{изк} = x - 2$ km/h. За Петър скоростта на спускане е $V_{сп} = x$ km/h, времето за спускане $t_{сп} = \frac{1}{3}h \Rightarrow$ пътят изминат от Петър при спускане е $S_{сп} = x.\frac{1}{3}km$. За Петър скоростта на изкачване е $V_{изк} = x - 2$ km/h, времето за изкачване е $t_{изк} = \frac{3}{4}h \Rightarrow$ пътят изминат от Петър при изкачване е $S_{изк} = (x-2).\frac{3}{4}km$. Така получаваме равенството $S_{сп} + S_{изк} = 5$ (разстоянието между двете селища е 5 км.) От което получаваме $x.\frac{1}{3} + (x-2).\frac{3}{4} = 5 \Leftrightarrow 4x + 9x - 18 = 60 \Leftrightarrow 13x = 78 \Leftrightarrow x = 6km/h$ е скоростта при спускане, а скоростта на изкачване е $4km/h$. Тогава пътят, изминат от Петър при спускане, е $S_{сп} = x.\frac{1}{3}km = 2km = AD$, а при изкачване $S_{изк} = (x-2).\frac{3}{4}km = 3km = DB$. Щом $AD < BD \Rightarrow$ Иван се е спуснал $2km$ до т.Е, когато Петър е в точка D. Следователно, срещата ще е в участъка $DE = 1km$. Нека y е времето на Петър и Иван в участъка DE до срещата. Пътят на Петър в този участък е $S_П = 4.y \quad km$, а на Иван $S_И = 6.y \quad km$. Тогава $S_П + S_И = 1км \Rightarrow 4.y + 6.y = 1 \Rightarrow 10.y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{10}h = 6\min$. Следователно от момента на тръгване до момента на срещата са изминали $20\min + 6\min = 26\min$.

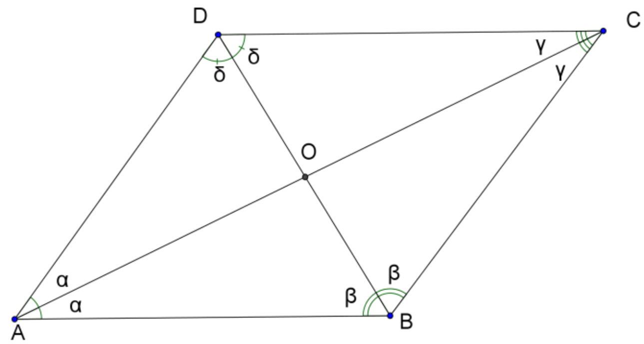


Задача 7. Докажете, че ако в един четириъгълник диагоналите са ъглополовящи на ъглите, през чиито върхове са прекарани, то той е ромб.

Решение:

От сбора на ъглите в $\Delta ACB: \angle ABC = 180^o - (\alpha + \gamma)$ и в $\Delta ACD: \angle ADC = 180^o - (\alpha + \gamma)$. Следователно $\angle D = \angle B$. Аналогично $\angle A = \angle C \Rightarrow$ срещуположните ъгли в четириъгълника са равни $\Rightarrow \alpha = \gamma = \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle C$, $\beta = \delta = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}\angle D \Rightarrow \Delta ACD \cong \Delta ACB$ (по втори признак) $\Rightarrow AD = AB$. Но

$AD = DC$ (ΔACD е равнобедрен) и $AB = BC$ (ΔACB е равнобедрен) $\Rightarrow AD = DC = AB = BC. \Rightarrow$ четириъгълникът има четири равни страни. Следователно четириъгълникът $ABCD$ е ромб.



Задача 8. Намерете най-малката стойност на израза $3x^2 + 24x + 100$, където x може да е произволно число и намерете за коя стойност на x се случва това.

Решение:

$$3x^2 + 24x + 100 = 3\left(x^2 + 8x + \frac{100}{3}\right) = 3\left(x^2 + 2.4.x + 16 - 16 + \frac{100}{3}\right) = 3\left((x+4)^2 + \frac{100-48}{3}\right) =$$

$$3\left((x+4)^2 + \frac{52}{3}\right) = 3(x+4)^2 + 52.$$

Понеже $(x+4)^2 \geq 0$ за всяка стойност на x, то $3(x+4)^2 + 52 \geq 52$. Следователно най-малката стойност на израза е 52 и тя се достига при $(x+4)^2 = 0$, т.е. при $x = -4$.

Задача 9. Какъв остатък при деление с 34 дава числото $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{2013} + 4^{2014}$?

Решение:

Забелязваме, че $1 + 4^2 = 17 \Rightarrow$ ще групираме събираемите по две (но не съседни, а през едно), започвайки от 4^{2014}. Събираемите са 2015. При групирането ще получим:

$$1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{2013} + 4^{2014} = (4^{2014} + 4^{2012}) + (4^{2013} + 4^{2011}) + (4^{2010} + 4^{2008}) + (4^{2009} + 4^{2007}) +$$

$$\ldots. + (4^6 + 4^4) + (4^5 + 4^3) + 4^2 + 4 + 1 = 4^{2012}(4^2 + 1) + 4^{2011}(4^2 + 1) + 4^{2008}(4^2 + 1) + 4^{2007}(4^2 + 1) +$$

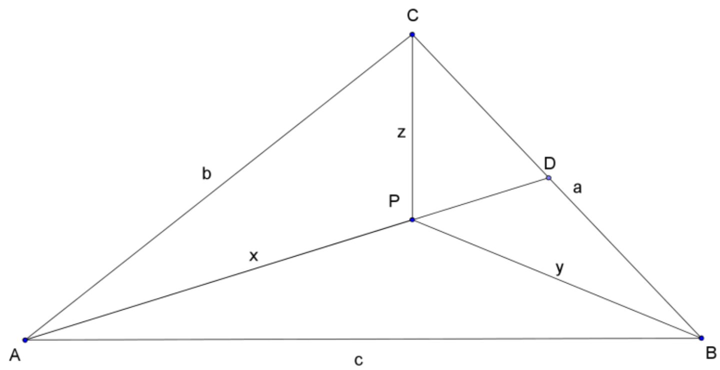
$$\ldots. + 4^4(4^2 + 1) + 4^3(4^2 + 1) + 4^2 + 4 + 1 = 4^{2012}.17 + 4^{2011}.17 + 4^{2008}.17 + 4^{2007}.17 + \ldots + 4^4.17 + 4^3.17 + 21$$

Всички събираеми (без 21) се делят на 34 (делят се на 4 и 17) $\Rightarrow$ остатъкът при деление с 34 на числото $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{2013} + 4^{2014}$ е 21.

Задача 10. Във вътрешността на триъгълник е взета произволна точка. Да се докаже, че сборът от разстоянията между точката и върховете на триъгълника е:

а) по-голям от полупериметъра му;
б) по-малък от периметъра му.

Решение:



Нека вътрешната точка е P, AC = b, BC = a, AB = c, AP = x, BP = y , PC = z, а правата AP пресича BC в точка D.

а) От неравенството на триъгълника, приложено за триъгълниците, на които се разделя дадения триъгълник от осечките, свързващи вътрешната точка P с върховете на триъгълника, получаваме:

$$\left.\begin{aligned} c &< x + y \\ a &< z + y \\ b &< z + x \end{aligned}\right\} \Rightarrow a + b + c < 2(x + y + z) \Rightarrow x + y + z > \frac{a + b + c}{2}$$

б) Използваме, че

$$\left.\begin{aligned} x + y &< b + a \\ z + y &< b + c \\ z + x &< a + c \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2(x + y + z) < 2(a + b + c) \Rightarrow x + y + z < a + b + c$$

Ще докажем, че $z + x < a + c$. (Аналогично се доказват и другите две неравенства.)
От ΔPDC получаваме $z < CD + PD$. От ΔABD получаваме $AD < DB + c$. Тогава
$z + x < CD + PD + x = CD + AD < CD + DB + c = a + c$.