НАЦИОНАЛНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ „АКАД. Л. ЧАКАЛОВ”

ТЕМА
за вътрешен профилиращ изпит по математика за прием на ученици след 7. клас в НПМГ „Акад. Л. Чакалов” 01.06.2014 г.

Вариант 1

Примерни решения:

Задача 1. Намерете най-голямото цяло число, което е решение на неравенството $\frac{(x-1)(x+1)}{2}-\frac{(x+2)^2}{3}\geq\left(\frac{x}{2}-3\right)\left(\frac{x}{3}+2\right)$.

Решение:

$\frac{x^2-1}{2}-\frac{x^2+4x+4}{3}\geq\frac{x^2}{6}+\cancel{x}-\cancel{x}-6$

$3x^2-3-2\left(x^2+4x+4\right)\geq x^2-36$

$\cancel{x^2}-8x-11\geq\cancel{x^2}-36$

$-8x\geq-25$

$x\leq3\frac{1}{8}$

Следователно най-голямото цяло число, което е решение на неравенството е 3.

Задача 2. Решете уравнението $\left|9x^2+5-(3x+2)^2\right|-5|1-12x|=-12$.

Решение:

$\left|\cancel{9x^2}+5\cancel{-9x^2}-12x-4\right|-5|1-12x|=-12$

$-4|1-12x|=-12$

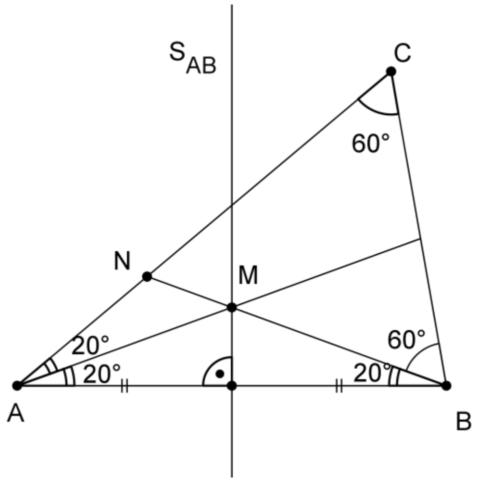
$|1-12x|=3$

$1-12x=3$ или $1-12x=-3$

$x_1=-\frac{1}{6}$ или $x_2=\frac{1}{3}$

Задача 3.

В $\triangle ABC$ $\sphericalangle BAC : \sphericalangle ABC : \sphericalangle ACB = 2:4:3$. Ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ и симетралата на страната AB се пресичат в точка M. Правата BM пресича страната AC в точка N. Ако $BC = 6\,cm$, то намерете периметъра на $\triangle BCN$.



Решение:

Нека $\sphericalangle BAC = 2x$, $\sphericalangle ABC = 4x$ и $\sphericalangle ACB = 3x$, тогава от теоремата за сбор на ъглите в $\triangle ABC$ имаме, че $9x = 180^\circ$, т.е. $x = 20^\circ$.

Следователно $\sphericalangle BAC = 40^\circ$, $\sphericalangle ABC = 80^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.

От това, че AM е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$ следва, че $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAM = 20^\circ$.

От $M \in S_{AB}$ следва, че $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = 20^\circ$.

Тогава $\sphericalangle NBC = 60^\circ$ и $\triangle NBC$ е равностранен, т.е. $P_{\triangle NBC} = 3BC = 18\,cm.$

Задача 4. В двора на НПМГ има тенис корт с формата на правоъгълник с дължина 2 пъти по-голяма от неговата ширина и футболно игрище с правоъгълна форма, което има ширина равна на дължината на тенис корта и дължина с 10 метра по-малка от обиколката на тенис корта. Ако площта на футболното игрище е 5 пъти по-голяма от площта на тенис корта, намерете колко квадратни метра е общата площ на двете спортни площадки.

Решение:

Нека ширината на тенис корта е $x\left(Д.С.\ x > 0\right)$, тогава дължината на тенис корта е $2x$ и тя е равна на ширината на футболното игрище. За дължината на футболното игрище получаваме $6x - 10\left(Д.С.\ x > \dfrac{5}{3}\right)$. Така за площта на тенис корта имаме, че е равна на $2x^2$, а площта на футболното игрище е $2x(6x-10)$. Следователно

$2x(6x-10) = 10x^2$

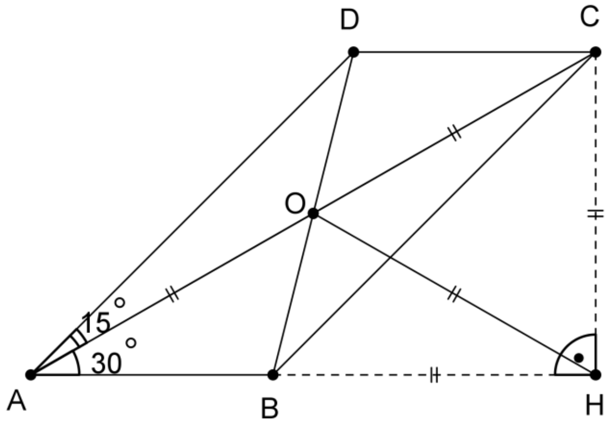
$x(x-10) = 0$

$x_1 = 0 \notin$ Д.С. или $x_2 = 10$

Тогава общата площ на двете спортни площадки е $S = 2x^2 + 2x(6x-10) = 1200\,m^2$.

Задача 5. Даден е успоредник $ABCD\left(\sphericalangle ABC > 90^\circ\right)$, $CH \perp AB$ и $CH = BH$. Намерете $\sphericalangle ABD$, ако $\sphericalangle BAC : \sphericalangle CAD = 2:1$.

Решение:



Тъй като $CH = BH$ и $CH \perp AB$, то $\sphericalangle HBC = \sphericalangle BCH = 45^\circ$.
Нека $\sphericalangle BAC = 2x$ и $\sphericalangle CAD = x$, тогава $\sphericalangle BAD = 3x = 45^\circ$ (съответни ъгли), т.е. $x = 15^\circ$.
От правоъгълния $\triangle AHC$ с $\sphericalangle HAC = 30^\circ$ следва, че $AC = 2CH = 2y$.
Нека $AC \times BD = O$, тогава тъй като $ABCD$ е успоредник, то $AO = CO = y$.
Тъй като $CO = CH = y$ и $\sphericalangle ACH = 60^\circ$, то $\triangle OHC$ е равностранен и $OH = BH = y$.

Тогава от равнобедрения $\triangle BHO$ имаме, че $\sphericalangle OBH = \dfrac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Следователно $\sphericalangle ABD = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

Задача 6. За патронния празник на НПМГ било възложено на фирма за рекламни материали да изработи определен брой ключодържатели с логото на училището. За да изпълнят поръчката в срок работниците във фирмата трябвало да произвеждат по 50 ключодържателя дневно. Първия ден работниците от фирмата произвели 50 ключодържателя, а през останалите дни те увеличили дневната си производителност с 20%, в резултат на което изпълнили поръчката един ден предсрочно. От колко ключодържателя се е състояла поръчката?

Решение:

Нека времето по план е $x\left(\text{Д.С. } x > 0\right)$, тогава фирмата трябва да произведе $50x$ на брой ключодържателя. В действителност първия ден работниците от фирмата произвеждат 50 ключодържателя, а през останалите $x-2\left(\text{Д.С. } x > 2\right)$ дни изработват по 60 ключодържателя дневно. Тогава съставяме уравнението:

$50 + 60\left(x - 2\right) = 50x$

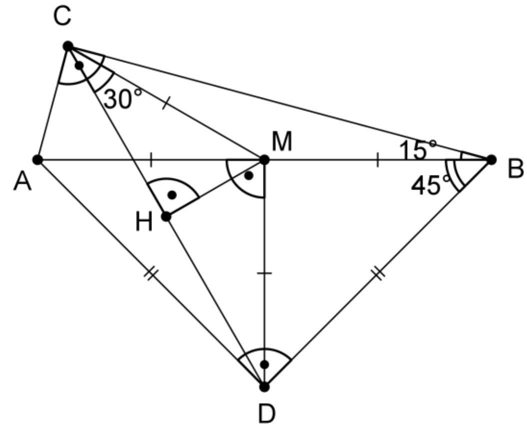
$10x = 70$

$x = 7$ дни

Следователно поръчаните ключодържатели са 350.

Задача 7. Дадени са два правоъгълни триъгълника $\triangle ABC\left(\sphericalangle C=90^\circ\right)$ и $\triangle ABD\left(\sphericalangle D=90^\circ\right)$, като точките C и D са в различни полуравнини относно правата AB. Ако $AD=BD,\ \sphericalangle ABC=33\frac{1}{3}\%.\sphericalangle ABD$ и $AB=13\,cm$, намерете разстоянието от средата M на хипотенузата AB до CD.

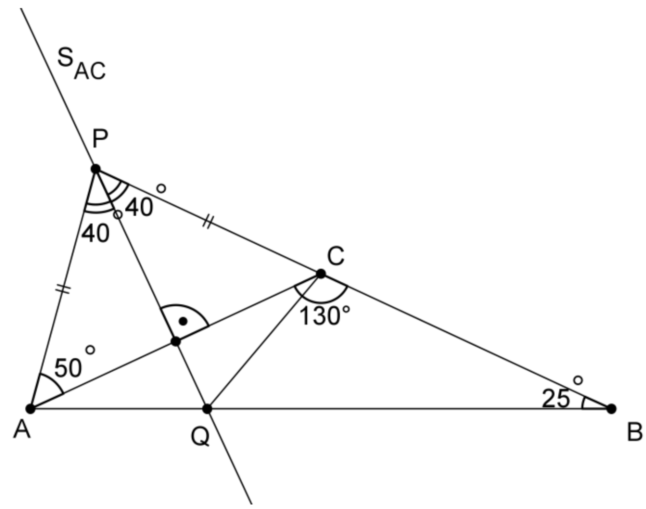
Решение:



Тъй като в правоъгълния $\triangle ABD\left(\sphericalangle D=90^\circ\right)$
$AD=BD$, то $\sphericalangle DAB=\sphericalangle DBA=45^\circ$ и тогава
$\sphericalangle ABC=15^\circ$.
От свойство на медианата в правоъгълния $\triangle ABC$ следва, че $CM=AM=MB=6,5\,cm$.
Тогава $\sphericalangle MCB=\sphericalangle MBC=15^\circ$ и $\sphericalangle CMA=30^\circ$ (външен ъгъл за $\triangle MBC$)
В равнобедрения правоъгълен $\triangle ABD$ имаме, че MD е медиана и височина и $MD=MB=6,5\,cm.$
Тогава в равнобедрения $\triangle DMC$ имаме, че
$\sphericalangle DMC=90^\circ+30^\circ=120^\circ$ и
$\sphericalangle MCD=\sphericalangle MDC=30^\circ$.
Нека $MH\perp CD$, тогава от правоъгълния $\triangle HMC$ с $\sphericalangle MCH=30^\circ$ следва, че $HM=\frac{1}{2}CM=3,25\,cm$.

Задача 8. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ с $\sphericalangle ACB=130^\circ$. Симетралата на страната AC пресича правата BC и страната AB съответно в точки P и Q. Докажете, че $P_{\triangle PQC}<P_{\triangle BCQ}$.

Решение:



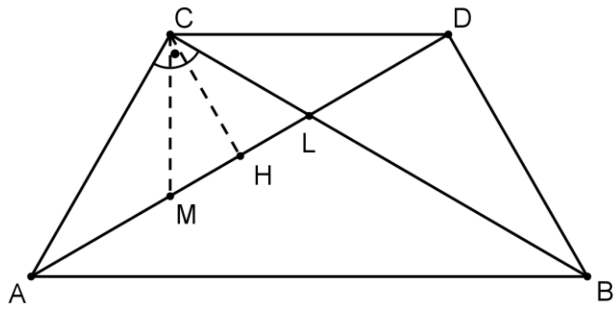
Тъй като $AC=BC$, то
$\sphericalangle CAB=\sphericalangle CBA=25^\circ$.
От $P\in S_{AC}$ следва, че $PA=PC$. Тогава в $\triangle APC$ имаме, че
$\sphericalangle CAP=\sphericalangle ACP=180^\circ-130^\circ=50^\circ$ и
$\sphericalangle APQ=\sphericalangle CPQ=40^\circ$.
За да докажем, че $P_{\triangle PQC}<P_{\triangle BCQ}$, достатъчно е да покажем, че
$PC+PQ<BC+BQ$.
В $\triangle BPQ$ тъй като $\sphericalangle PBQ<\sphericalangle BPQ$, то
$PQ<BQ$.
В $\triangle ACP$ тъй като $\sphericalangle PAC<\sphericalangle APC$, то $PC<AC$, т. е. $PC<BC$.
Следователно $PC+PQ<BC+BQ$.

Задача 9. За откриването на спортен празник учениците от седми клас на едно училище трябва да се строят в няколко редици. Ако се строят по 6 ученици в редица, то последната ще остане непълна. Ако се строят по 9 ученици, ще се образуват 4 редици по-малко, но всички редици ще бъдат пълни. Колко седмокласници от това училище участват в спортния празник?

Решение:
Нека първоначално има x пълни редици по 6 ученици и още a ученици в последната непълна редица. Тогава при строяване по 9 редиците са $x-3$. Съставяме уравнението $6x+a=9(x-3)$ и изразяваме $a=3x-27$. Това число е положително и затова $x>9$. **(1т.)** Освен това числото a е по-малко от 6, от където $x<11$.
Следователно $x=10$ и седмокласниците са 63.

Задача 10. Върху ъглополовящата AL на правоъгълния триъгълник ABC $(\sphericalangle ACB=90°,\ L\in BC)$ е взета точка D така, че $CD=CA$. Ако $AL=2LD$ и $AB=10\,\text{cm}$, намерете периметъра на $ABDC$.

Решение:



От AL – ъглополовяща в $\triangle ABC$ имаме, че $\sphericalangle CAL=\sphericalangle LAB$, а от $CD=CA$ следва, че $\sphericalangle CAD=\sphericalangle CDA$ и получаваме, че $AB \parallel CD$.
Нека средата на AL е точка M и означим $AM=ML=LD=a$. Построяваме $CH\perp AD\,(H\in AD)$. Тъй като $\triangle ADC$ е равнобедрен, то $AH=HD=\frac{3}{2}a$ и $MH=HL=\frac{1}{2}a$.
Следователно $\triangle MLC$ е равнобедрен, като $CM=CL$. Но CM е медиана към хипотенузата $AL=2a$ в правоъгълния $\triangle ALC$, от където $MH=\frac{1}{2}CM$ и $\sphericalangle MCH=30°$. Тогава $\triangle MLC$ е равностранен и в $\triangle ALC$ $\sphericalangle CAL=30°$. Следователно $\sphericalangle BAL=30°, \sphericalangle CAB=60°, \sphericalangle ABC=30°$ и $\triangle ABL$ е равнобедрен, като $AL=BL$
В равнобедрения $\triangle ADC$ имаме $\sphericalangle CDA=\sphericalangle CAD=30°$ и $\sphericalangle ACD=120°$. Така получаваме, че $\sphericalangle LCD=30°$ и $CL=DL$.
Тогава $\triangle ALC\cong\triangle BLD$ и $BD=AC=CD$.
Но в $\triangle ABC$ $AB=10$ cm, $\sphericalangle C=90°, \sphericalangle B=30°$ следователно $AC=5$ cm и
$P_{ABDC}=AB+3.AC=25\,\text{cm}.$