Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О   Н А   О Б Р А З О В А Н И Е Т О   И   Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

НАЦИОНАЛЕН КРЪГ

29 юни 2020 г.

Т Е М А 7. К Л А С

Задача 1. В триъгълник ABC мярката на $\sphericalangle ACB$ е 98°, CH $(H \in AB)$ е височина и CL $(L \in AB)$ е ъглополовяща на $\sphericalangle ACH$. Намерете мярката на $\sphericalangle ABC$, ако $AC = CH + \dfrac{AL}{2}$.

7 точки

Задача 2. Иван, Стоян и Гошо боядисвали ограда. Отначало Иван боядисвал сам толкова време, колкото е необходимо на Стоян и на Гошо, заедно да боядисат половината ограда. След това Стоян работил сам толкова време, колкото е необходимо на Иван и на Гошо, заедно да боядисат $\dfrac{5}{4}$ от цялата ограда. Накрая Гошо работил сам толкова време, колкото е необходимо на Иван и на Стоян, заедно да боядисат $\dfrac{1}{4}$ от оградата. В резултат на това Иван, Стоян и Гошо боядисали оградата. Колко пъти по-бързо щяха да боядисат оградата, ако от самото начало работеха и тримата заедно?

7 точки

Задача 3. В произволен триъгълник на всяка страна са отбелязани по 14 точки. Всеки връх на триъгълника е свързан с всяка от тези точки, лежаща на срещулежащата страна, чрез отсечка.

А) На колко най-много части получените отсечки могат да разделят триъгълника?

Б) Ако 14-те точки от съответната страна я разделят на 15 равни части, намерете на колко части получените отсечки разделят триъгълника.

7 точки

Време за работа 4 часа.

Пожелаваме Ви успех!

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

НА ЗАДАЧИТЕ ПО ТЕМАТА

НАЦИОНАЛНИЯ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА 2020

ЗА 7. КЛАС

7.1. В триъгълник ABC мярката на ъгъл $\sphericalangle ACB$ е 98°, CH $(H \in AB)$ е височина и CL $(L \in AB)$ е ъглополовяща на ъгъл ACH. Намерете мярката на $\sphericalangle ABC$, ако $AC = CH + \frac{AL}{2}$.

Решение: Построяваме $LN \perp AC$ $(N \in AC)$. Имаме, че $\Delta NLC \cong \Delta HLC \Rightarrow CH = CN \Rightarrow$ $AN = \frac{AL}{2} \Rightarrow$ в правоъгълния триъгълник ALN катета AN е половината от хипотенузата AL $\Rightarrow \angle NAL = 60° \Rightarrow \angle ABC = 22°$.

Оценяване: Построяване на LN (1 точка). Доказателство, че $\Delta NLC \cong \Delta HLC$ (2 точки). Извод, че $CH = CN$ (1 точка) и $AN = \frac{AL}{2}$ (1 точка). AN половината от хипотенузата $AL \Rightarrow$ $\angle NAL = 60°$ (1 точка). Отговор $\angle ABC = 22°$ (1 точка).

Всяко друго решение се оценява с пълен брой точки.

7.2. Иван, Стоян и Гошо боядисвали ограда. Отначало Иван боядисвал сам толкова време, колкото е необходимо на Стоян и Гошо, заедно да боядисат половината ограда. След това работил сам Стоян толкова време, колкото е необходимо на Иван и Гошо, заедно да боядисат $\frac{5}{4}$ от цялата ограда. Накрая работил сам Гошо толкова време, колкото е необходимо на Иван и Стоян, заедно да боядисат $\frac{1}{4}$ от оградата. В резултат на това Иван, Стоян и Гошо боядисали оградата. Колко пъти по-бързо щяха да боядисат оградата, ако от самото начало работеха и тримата заедно?

Решение:

Нека работата, която трябва да свършат е 1, производителността на всеки от тях съответно е: x, y и z и времето, през което работят сами t_1, t_2 и t_3. От условието: $(y+z)t_1 = \frac{1}{2}$; $(x+z)t_2 = \frac{5}{4}$; $(x+y)t_3 = \frac{1}{4}$ и $xt_1 + yt_2 + zt_3 = 1$. Трябва да определим работата, която биха свършили, ако работят заедно от самото начало, т.е.

$$(t_1+t_2+t_3)(x+y+z) = (y+z)t_1 + (x+z)t_2 + (x+y)t_3 + xt_1 + yt_2 + zt_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4} + 1 = 3.$$

Следователно при това условие, биха свършили 3 пъти повече работа, следователно, ако от самото начало работеха и тримата заедно щяха да боядисат 3 пъти по-бързо оградата.

Оценяване: 1 точка за означаване, по 0,5 точки за изразяване на четирите условия, 1 точка за определяне на работата, която биха свършили, ако работят заедно от самото начало, т.е. $(t_1+t_2+t_3)(x+y+z)$, 2 точка за намиране на

$(t_1+t_2+t_3)(x+y+z)=(y+z)t_1+(x+z)t_2+(x+y)t_3+xt_1+yt_2+zt_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{5}{4}+1=3$ и 1 точка за отговор.

Всяко друго решение се оценява с пълен брой точки.

7.3. В произволен триъгълник на всяка страна са отбелязани по 14 точки. Всеки връх на триъгълника е свързан с всяка от тези точки, лежаща на срещулежащата страна, чрез отсечка.

А) На колко най-много части получените отсечки могат да разделят триъгълника?

Б) Ако 14-те точки от съответната страна я разделят на 15 равни части, намерете на колко части получените отсечки разделят триъгълника.

Решение:

А) 631 - Най-големият брой части ще се получи, ако няма три отсечки, пресичащи се в една точка. Броят на частите ще се определи от максималния брой точки върху всяка от отсечките. Всяка точка ще добавя същия брой части. 14 – те отсечки през първия връх добавя по 1 част.

1 + 14 = 15 части. Всяка от отсечките през втория връх ще има по 14 пресечни точки с всяка от отсечките през първия, т.е. всяка ще добавя по 15 части – 14.15 части. За отсечките от третия връх всяка от 14 – те отсечки ще има по 28 пресечни точки, т.е. добавя по 29 части – 14.29.

Общо най-много ще са: 15 + 14.15 + 14.29 = 631части;

Б) 625 Нека три от точките по трите страните a, b и c ги делят в отношение $a:a_1; b:b_1; c:c_1$, където $a+a_1=b+b_1=c+c_1=15$. За да се пресичат отсечките в една точка, трябва да е изпълнено $\frac{a}{a_1}.\frac{b}{b_1}.\frac{c}{c_1}=1$. Можем да считаме, че две от дробите са по-малки от 1 $\left(\frac{a}{a_1};\frac{b}{b_1}\right)$, а третата е по-голяма от 1 $\left(\frac{c}{c_1}\right)$ и $\frac{a}{a_1}.\frac{b}{b_1}=\frac{c_1}{c}$. Всички възможни дроби, по-малки от 1 са: $\frac{1}{14};\frac{2}{13};\frac{3}{12}=\frac{1}{4};\frac{4}{11};\frac{5}{10}=\frac{1}{2};\frac{6}{9}=\frac{2}{3};\frac{7}{8}$. Дробите $\frac{2}{13}$; $\frac{4}{11}$ и $\frac{2}{3}$ не може да участват, защото простите делители 13, 11 и 3 не могат да се съкратят. Простият делител 7 участва в дробите $\frac{1}{14}$ и $\frac{7}{8}$ и $\frac{1}{14}.\frac{7}{8}=\frac{1}{16}$, но $\frac{1}{16}$ не е от изброените. Остава само възможността: $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. Следователно, ако едно от отношенията е 1:4 или 4:1, останалите две се определят еднозначно и от максималния брой части губим 6, отчитайки пресичането на трите отсечки в една точка, т.е. 631 – 6 = **625**