Министерство на образованието и науката

69. Национална олимпиада по математика

29 юни 2020 г.
Решения на задачите за 8. клас

Задача 1. (Таня Стоева) Окръжностите k_1 и k_2 се пресичат в точките A и B. Точка C е вътре в окръжността k_1 и лежи на k_2. Правите AC и BC пресичат за втори път окръжността k_1 съответно в точки M и N, а правата MB пресича окръжността k_2 в точка D, така че B е между M и D. Допирателната към k_2 в точка C пресича отсечката MB в точка E. Докажете, че $MN = MD$ тогава и само тогава, когато $ME = CE$.

Решение. Имаме $\sphericalangle MNC = \sphericalangle MAB = \frac{1}{2}\,\widehat{MB}$ (вписани ъгли в k_1) и $\sphericalangle MAB = \sphericalangle CDB = \sphericalangle ECB = \frac{1}{2}\,\widehat{CB}$ (вписани ъгли и периферен ъгъл в k_2). Нека $\sphericalangle MNC = \sphericalangle MAB = \sphericalangle CDB = \sphericalangle ECB = \alpha$. Имаме $\sphericalangle MCE = \sphericalangle CBA = \frac{1}{2}\,\widehat{AC}$ (вписан и периферен ъгъл в k_2) и $\sphericalangle CBA = \sphericalangle NBA = \sphericalangle NMA = \frac{1}{2}\,\widehat{AN}$ (вписани ъгли в k_1). Нека $\sphericalangle MCE = \sphericalangle NBA = \sphericalangle NMA = \beta$.

Нека $ME = CE$. Тогава $\sphericalangle CME = \sphericalangle MCE = \beta$ и $\triangle NCM \cong \triangle DCM$ (по страна и два ъгъла), така че $MN = MD$.

Нека $MN = MD$. Тогава $\sphericalangle MND = \sphericalangle MDN$ и от $\sphericalangle MNC = \sphericalangle MDC = \alpha$ следва $\sphericalangle CND = \sphericalangle CDN$, т.е. $CN = CD$. Следователно $\triangle NCM \cong \triangle DCM$ (по три страни), така че $\sphericalangle AMN = \sphericalangle CME = \beta$, откъдето $\sphericalangle CME = \sphericalangle MCE$ и $ME = CE$.

Оценяване (7 точки): 1 т. за доказване, че $\sphericalangle MNC = \sphericalangle MAB = \sphericalangle CDB = \sphericalangle ECB$; 1 т. за доказване, че $\sphericalangle MCE = \sphericalangle NBA = \sphericalangle NMA$; 2 т. за доказване на импликацията $ME = CE \Rightarrow MN = MD$; 3 т. за доказване на импликацията $MN = MD \Rightarrow ME = CE$.

Задача 2. (Ивайло Кортезов) Намерете всички двойки цели числа $(x; y)$, такива че

$$x(x-1) = y^4 + 4y^3 + 5y^2 + y + 5.$$

Решение. Да умножим по 4 и да добавим 1:

$$(2x-1)^2 = 4y^4 + 16y^3 + 20y^2 + 4y + 21.$$

Ако $y \geq 0$, то дясната страна е по-голяма от $(2y^2 + 4y)^2$, така че

$$4y^4 + 16y^3 + 20y^2 + 4y + 21 \geq (2y^2 + 4y + 1)^2 = 4y^4 + 16y^3 + 20y^2 + 8y + 1,$$

откъдето $5 \geq y$. Проверката за $y = 0, 1, ..., 5$ дава само решенията $(36; 5)$ и $(-35; 5)$.
Нека сега $y = -z < 0$. Уравнението добива вида

$$(2x-1)^2 = 4z^4 - 16z^3 + 20z^2 - 4z + 21.$$

за $z > 0$. При $z = 1$ дясната страна е равна на 25 и получаваме решенията $(x; y) = (3; -1)$ и $(-2; -1)$. Нека сега $z \geq 2$. Имаме

$$4z^4 - 16z^3 + 20z^2 - 4z + 21 > 4z^4 - 16z^3 + 20z^2 - 8z + 1 = (2z^2 - 4z + 1)^2$$

и тъй като при $z \geq 2$ числото в скобите е положително, заключаваме, че

$$4z^4 - 16z^3 + 20z^2 - 4z + 21 \geq (2z^2 - 4z + 2)^2 = 4z^4 - 16z^3 + 24z^2 - 16z + 4,$$

откъдето $17 \geq 4z^2 - 12z = 4z(z-3)$ и $z \leq 4$. Проверката за $z = 2, 3, 4$ дава само решенията $(x; y) = (5; -3)$ и $(-4; -3)$.
Отговор: $(x; y) = (3; -1)$, $(-2; -1)$, $(5; -3)$, $(-4; -3)$, $(36; 5)$ и $(-35; 5)$.
Оценяване (7 точки): По 0,5 т. за намиране на всяко от шестте решения; 2 т. за доказване, че няма други решения при $y \geq 0$; 2 т. за доказване, че няма други решения при $y < 0$.

Задача 3. (Ивайло Кортезов) В три разноцветни кутии има общо n еднакви семки; във всяка кутия има поне по една семка. Ани и Боби играят, редувайки се; започва Ани. Който е на ход, изяжда всички семки от някои две от кутиите и пресипва в опразнените кутии част от семките от третата кутия, така че след хода и в трите кутии да има поне по една семка. Който не може да играе, губи, а другият печели. Играчите са достатъчно умни и мотивирани за победа. Считаме две начални разположения за различни, ако се различават по броя семки в поне една от кутиите.
а) Ако $n = 26$, кой ще победи?
б) Ако $n = 46$ и всички различни начални разположения са равновероятни, каква е вероятността Ани да победи?
в) Ако $n = 460$, колко са различните начални разположения, при които Боби ще победи?

Решение. Номерираме кутиите 1, 2, 3. Всички остатъци и сравнения в решението са по модул 6. Ще наричаме едно естествено число *яко*, ако е сравнимо с 0, 3, 4 или 5.
Факт 1. Ако сбор на три естествени числа не е яко число, то поне едно от трите числа е яко.
Доказателство. Ако допуснем, че трите събираеми не са яки, то сборът им дава остатък $1 + 1 + 1 = 3$, $1 + 1 + 2 = 4$, $1 + 2 + 2 = 5$ или $2 + 2 + 2 \equiv 0$, т.е. е яко число: абсурд.
Факт 2. Всяко яко число може да се представи като сбор на три естествени числа, които не са яки.
Доказателство. Следва от представянията $6k+3 = (6k+1)+1+1$, $6k+4 = (6k+1)+1+2$, $6k+5 = (6k+1)+2+2$, $6k+6 = (6k+2)+2+2$ за цели $k \geq 0$.

Наредената тройка естествени числа, представящи броя семки в трите кутии, ще наричаме *позиция*. Сега ще докажем, че една позиция е печеливша точно когато сред числата в нея има поне едно яко.
Ако броят семки в някоя кутия е яко число, то според Факт 2 играчът може да изяде семките от другите две кутии и да пресипе семките от тази кутия в тях, така че бройките семки в трите кутии да не са яки.
Ако броят семки в никоя кутия не е яко число и има възможен ход, то според Факт 1 след него броят семки в някоя кутия ще е яко число. Ако пък няма възможен ход, то най-голямото число е 1 или 2 и играчът губи.
Следователно ако в позицията има яко число, то играчът винаги може да играе, и то така, че да остави на противника позиция без яки числа. Ако в позицията няма яко число, то играчът или няма възможен ход, или се принуждава отново да остави позиция с яко число. Понеже най-голямото от трите числа намалява при всеки ход, в даден момент ще се стигне до позиция, в която ходът е невъзможен и играчът губи.

а) Понеже числото 26 не е яко, то според Факт 1 броят семки в някоя кутия е яко число. Така според доказаното началната позиция е печеливша, т.е. Ани печели.

б) При $n = 46$ всички различни начални разпределения може да се преброят така: поставяме по една семка във всяка кутия, а разпределението на останалите 43 кодираме с 45-буквена дума с 43 букви „С“ (по една за всяка семка) и 2 букви „Р“, служещи за разделители между трите кутии. Броят на тези кодове е $45.44 : 2 = 990$. Боби ще спечели точно когато в трите кутии остатъците са 1 или 2; при $n = 46$ трябва в една от кутиите (3 избора коя) броят семки да е равен на $6a + 2$, а в другите – на $6b + 1$ и $6c + 1$, където a, b, c са цели неотрицателни със сбор $(46 - 4) : 6 = 7$. Разпределянето на 7 сред a, b, c кодираме с 9-буквена дума със 7 букви „Е“ (по една за всяка единица) и 2 букви „Р“, служещи за разделители между променливите. Броят на тези кодове е $9.8 : 2 = 36$. Така вероятността за успех на Боби е $\frac{3.36}{990} = \frac{6}{55}$. Отговор: $1 - \frac{6}{55} = \frac{49}{55}$.

в) Боби би спечелил, ако в една от кутиите (3 избора коя) броят семки е равен на $6a+2$, а в другите – на $6b+1$ и $6c+1$, където a, b, c са цели неотрицателни със сбор $(460-4) : 6 = 76$. Разпределянето на 76 сред a, b, c кодираме с дума от 76 букви „Е“ (по една за всяка единица) и 2 букви „Р“, служещи за разделители между променливите. Броят на тези кодове е $78.77 : 2 = 3003$. Отговорът на в) е $3.3003 = 9009$.

Оценяване (7 точки): 2 т. за намиране (с доказателство) на необходимите губещи позиции; 1 т. за мотивиран отговор на а); 2 т. за мотивиран отговор на б); 2 т. за мотивиран отговор на в).