Задача 8.1. В окръжност е вписан четириъгълник $ABCD$, за който $AB = 10$ cm и $AD = 4$ cm. Ъглополовящите на $\sphericalangle ADC$ и $\sphericalangle BCD$ се пресичат в точка L, лежаща на AB. Ако разстоянието от L до AD е d cm, запишете лицето на триъгълник BCL в кв.см като многочлен на d в нормален вид.

Решение. Поради основното свойство на точките от ъглополовящите точка L е на d cm и от CD, и от BC. Нека $\sphericalangle ADL = \sphericalangle LDC = x$, $\sphericalangle BCL = \sphericalangle LCD = y$; тогава $\sphericalangle BAD = 180^\circ - 2y$ и $\sphericalangle ABC = 180^\circ - 2x$. Нека описаната окръжност за $\triangle CDL$ пресича за втори път AB в точка K; тогава $\sphericalangle AKD = \sphericalangle LCD = y$ и $\sphericalangle BKC = \sphericalangle LDC = x$. От сбор на ъглите в $\triangle AKD$ получаваме $\sphericalangle ADK = y$, откъдето $AK = AD = 4$ cm; аналогично в $\triangle BKC$ получаваме $BC = BK = 10 - 4 = 6$ cm. Тогава и $S_{BCL} = \frac{6d}{2} = 3d$ cm^2.

Критерии за оценяване: (7 точки) 4 т. за доказване, че $AB = AD + BC$; 3 т. за завършване.

Задача 8.2. Намерете най-малкото естествено число n, за което съществуват n на брой 966-ти степени на естествени числа, чийто сбор се дели на 2021, но не се дели на 2021^{966}.

Решение. Ще покажем, че търсеното най-малко n е 43. Да отбележим, че 517 се дели на 47 и дава остатък 1 при деление с 43. Ако $n = 43$, можем да вземем 43 пъти 517^{966}, при което сборът ще се дели на 43 и на 47, а значи и на $2021 = 43.47$. В същото време $0 < 43.517^{966} < (2.517)^{966} < 2021^{966}$, така че 43.517^{966} не се дели на 2021^{966}.

Нека сега n е естествено число, по-малко от 43. Да отбележим, че разлагането на 2021 на прости множители е 43.47. Според Теоремата на Ферма, за всяко цяло a остатъкът на $a^{966} = (a^{42})^{23}$ при деление с 43 е 0 или 1, така че ако сбор на n такива числа е кратен на 43, то трябва всички те да се делят на 43, а значи и на 43^{966}. Също остатъкът на $a^{966} = (a^{46})^{21}$ при деление с 47 е 0 или 1, така че ако сбор на n такива числа е кратен на 47, то трябва всички те да се делят на 47, а значи и на 47^{966}. Следователно сборът на числата се дели на $43^{966}.47^{966} = 2021^{966}$, така че избраното $n < 43$ е неподходящо.

Критерии за оценяване: (7 точки) 3 т. за обоснован пример за $n = 43$, 4 т. за доказателство, че $n < 43$ е неподходящо.

Задача 8.3. Играта Трицифромино се играе с комплект плочки, подобен на този за Домино. Всяка плочка съдържа две трицифрени числа, едното от които се получава от другото чрез увеличаване на една от цифрите му с 1. Всяка такава двойка трицифрени числа се среща на точно една плочка, като редът на двете числа на плочката не е важен.

а) Колко плочки съдържа един комплект Трицифромино?

б) При играта Трицифромино плочките се подреждат в редици, като съседните плочки в редицата се докосват с еднакви числа. Какъв най-малък брой редици е нужен за поставяне на всички плочки от комплекта?

Решение. а) Ако разликата 1 е в цифрата на стотиците, то за по-малкото число на плочката има 8 избора за първата цифра (1, 2, ..., 8), 10 за втората и 10 за третата, общо $8.10.10 = 800$ плочки.

Ако разликата 1 е в цифрата на десетиците, то за по-малкото число на плочката има 9 избора за първата цифра, 9 за втората (0, 1, ..., 8) и 10 за третата, общо $9.9.10 = 810$ плочки.

Ако разликата 1 е в цифрата на единиците, аналогично има $9.10.9 = 810$ плочки.

Това дава общо $800 + 810 + 810 = 2420$ плочки.

б) „Крайна цифра“ ще наричаме:

цифрата 1 и цифрата 9, когато се срещат при стотиците;

цифрата 0 и цифрата 9, когато се срещат на друга позиция.

Ако трицифрено число се записва с три крайни цифри (имаме $2.2.2 = 8$ такива трицифрени числа), то участва в 3 плочки, понеже можем да променяме всяка от трите му цифри по единствен начин (например числото 190 участва в плочки заедно с 290, 180 и 191). Понеже 3 е нечетно, в поне една от редиците такова число трябва да е крайно.

Ако трицифрено число се записва с една крайна цифра (имаме $2.8.8+7.2.8+7.8.2 = 352$ такива трицифрени числа), то участва в 5 плочки, понеже можем да променяме една от трите му цифри по единствен начин, а останалите – по два (например числото 135 участва в плочки заедно с 235, 125, 145, 134 и 136). Понеже 5 е нечетно, в поне една от редиците такова число трябва да е крайно.

И така, имаме поне $8+352 = 360$ крайни числа, така че са нужни поне $360 : 2 = 180$ редици. Това могат да са например следните $56 + 8 + 48 + 8 + 49 + 7 + 4 = 180$ редици (долепени три символа – букви или цифри – означават трицифрено число):

за всеки $A \in \{2; ...; 8\}$ и $B \in \{1; ...; 8\}$: общо $7.8 = 56$ редици от вида $(1AB; 2AB)$, $(2AB; 3AB)$, ..., $(8AB; 9AB)$;

за всяко $B \in \{1; ...; 8\}$: общо 8 редици от вида $(11B; 21B)$, $(21B; 31B)$, ..., $(81B; 91B)$, $(91B; 90B)$, $(90B; 80B)$, ..., $(20B; 10B)$,$(10B; 11B)$, ..., $(18B; 19B)$, $(19B; 29B)$, ..., $(89B; 99B)$, $(99B; 98B)$, ..., $(92B; 91B)$;

за всеки $A \in \{3; ...; 8\}$ и $B \in \{1; ...; 8\}$: общо $6.8 = 48$ редици от вида $(AB0; AB1)$, $(AB1; AB2)$, ..., $(AB8; AB9)$;

за всяко $B \in \{1; ...; 8\}$: общо 8 редици от вида $(2B0; 2B1)$, $(2B1; 2B2)$, ..., $(2B8; 2B9)$, $(2B9; 1B9)$, $(1B9; 1B8)$, ..., $(1B1; 1B0)$,$(1B0; 2B0)$, ..., $(8B0; 9B0)$, $(9B0; 9B1)$, ..., $(9B8; 9B9)$, $(9B9; 8B9)$, ..., $(3B9; 2B9)$;

за всеки $A \in \{2; ...; 8\}$ и $B \in \{2; ...; 8\}$: общо $7.7 = 49$ редици от вида $(B0A; B1A)$, $(B1A; B2A)$, ..., $(B8A; B9A)$;

за всяко $B \in \{2; ...; 8\}$: общо 7 редици от вида $(B01; B11)$, $(B11; B21)$, ..., $(B81; B91)$, $(B91; B90)$, $(B90; B80)$, ..., $(B10; B00)$,$(B00; B01)$, ..., $(B08; B09)$, $(B09; B19)$, ..., $(B89; B99)$, $(B99; B98)$, ..., $(B92; B91)$;

редицата (100;101), (101;102), ..., (108;109), (109;209), ..., (809;909), (909;908), ..., (901;900);

редицата (109;119), (119;129), ..., (189;199), (199;299), ..., (899;999), (999;989), ..., (919;909);

редицата (199;198), (198;197), ..., (191;190), (190;290), ..., (890;990), (990;991), ..., (998;999);

редицата (190;180), (180;170), ..., (110;100), (100;200), ..., (800;900), (900;910), ..., (980;990).

Проверка: $56.8 + 8(24 + 18) + 48.9 + 8(27 + 16) + 49.9 + 7(27 + 18) + 4(9 + 8 + 9) = 2420$.

Критерии за оценяване: (7 точки) а) 1 т.; б) 6 т., от които 2 т. за доказване, че броят редици е поне 180; 4 т. за работещ пример със 180 редици.

Автори на задачите: 8.1, 8.2 и 8.3 – Ивайло Кортезов.