МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И УПЪТВАНЕ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ НАЦИОНАЛЕН КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИ ОТ VII КЛАС

15.05.2021 г.

ЗАДАЧА 1. А) Да се реши уравнението

$$\frac{x+3}{2}+\frac{x+7}{3}+\frac{x+13}{4}+\frac{x+21}{5}+\frac{x+31}{6}=15$$

Б) Да се докаже, че за всяко x е в сила неравенството

$$|x|+|x+1|+|x+2|+\ldots+|x+2020|+|x+2021|\geq 1011^2$$

Примерно решение

$$\frac{x+3}{2}+\frac{x+7}{3}+\frac{x+13}{4}+\frac{x+21}{5}+\frac{x+31}{6}=15$$

$$30(x+3)+20(x+7)+15(x+13)+12(x+21)+10(x+31)=15.60$$

А) $30x+90+20x+140+15x+195+12x+252+10x+310=900$

$87x+987=900$

$87x=-87$

$x=-1$

Б) Ще приложим неравенството $|a|+|b|\geq|a-b|$. Имаме

$|x|+|x+2021|\geq 2021$

$|x+1|+|x+2020|\geq 2019$

$|x+2|+|x+2019|\geq 2017$

....

$|x+1011|+|x+1012|\geq 1$

Събираме почленно горната съвкупност от неравенства и получаваме $|x|+|x+1|+|x+2|+\ldots+|x+2020|+|x+2021|\geq 1+3+5+\ldots+2019+2021.$ Сега ще използваме формулата за сбор на първите k нечетни числа $1+3+5+\ldots+(2k+1)=k^2$, която като приложим за $k=2021$ имаме $1+3+5+\ldots+2019+2021=1011^2$. *(4 точки)*

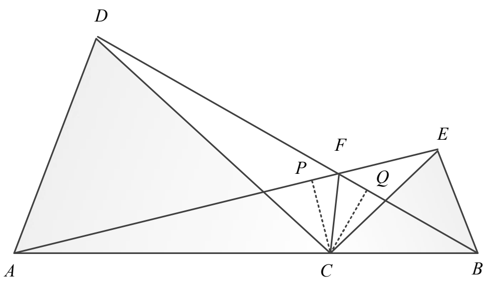
ЗАДАЧА 2. Върху дадена отсечка AB е взета точка C. Точките D и E са разположени в една и съща полуравнина, определена от правата AB, така че $CD = AC,\ \ CE = BC$ и $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE$. Нека F е пресечната точка на AE и BD.

А) Да се докаже, че FC е ъглополовяща на ъгъла AFB

Б) Ако съществува точка L върху правата CF, различна от F и C, такава че LC е ъглополовяща на ъгъл ALB, да се намери отношението AC**:**AB.

Примерно решение:

А) $\Delta ACE \cong \Delta BCD$ по първи признак. Следователно $CP = CQ$, като съответни височини в еднакви триъгълници. Тук $CP \perp AE, P \in AE$ и $CQ \perp BD, Q \in BD$. Следователно точката е равноотдалечена от раменете на ъгъла и значи FC е ъглополовяща.



Б) Ако съществува точка L върху правата FC с дадените свойства, лесно се вижда, че $\sphericalangle LAF = \sphericalangle LBF$, като се разглеждат три случая за разположението на L - L е между C и F, F е между L и C, и C е между F и L. Следователно $\Delta ALF \cong \Delta BLF$, откъдето AL=BL. Понеже LC е ъглополовяща при върха на равнобедрения триъгълник ALB, тя е и медиана, т.е. AL=BL и търсеното отношение е равно на $AC:AB$=1:2.

ЗАДАЧА 3. Докажете съществуват ли естествени числа x и y, такива че

$$3x^2 - x = 4y^2 - y?$$

Примерно решение:

Приемаме, че естествените числа x и y удовлетворяват равенството $3x^2 - x = 4y^2 - y$. Полагаме $t = x - y$, откъдето $y = x - t$ и заместваме $3x^2 - x = 4\left(x-t\right)^2 - (x-t)$. Така получаваме $x^2 - 8tx + 4t^2 + t = 0$. Отделяме точен квадрат $\left(x-4t\right)^2 = 12t^2 - t$, $\left(x-4t\right)^2 = t(12t-1)$. Числата t и $12t-1$ са взаимно прости и понеже произведението им е точен квадрат, следва че всяко от тях е точен квадрат, т.е. $t = u^2$ и $12t - 1 = v^2$. От последното следва, че $v^2 + 1$ се дели на 3, което е невъзможно. Полученото противоречие доказва, че числа с исканите свойства не съществуват.