Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

---

71. Национална Олимпиада по математика

8 клас: условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 1. Даден е триъгълник ABC ($AC > BC$) с описана окръжност k. Ъглополовящата на $\angle ACB$ пресича страната AB в точка P и окръжността k в точка $R \neq C$. Описаната около триъгълника APR окръжност пресича страната AC във вътрешна точка O. Правите BO и RO пресичат k за втори път съответно в точките L и M. Да се докаже, че:

а) $OL = LM$;

б) диагоналите на четириъгълника $LORA$ са перпендикулярни.

Решение. а) От окръжността k получаваме $\angle AMR = \angle ACR = \angle BCR = \angle BMR$, а заедно с описаната на APR следва $\angle MAC = \angle MRC = \angle ORP = \angle PAO = \angle BAC$. Следователно O е пресечната точка на ъглополовящите в триъгълника ABM – в частност, BL е ъглополовяща на $\angle ABM$ и $AL = LM$. Оттук $\angle LMO = \angle LMA + \angle OMA = \frac{\angle ABM + \angle AMB}{2} = 90^\circ - \frac{\angle MAB}{2} = \angle 90^\circ - \frac{\angle MLO}{2}$ и следователно $OL = LM$.

б) От $AL = LM$ (което показахме в а)) и $OL = LM$ следва $AL = OL$; освен това LR е ъглополовяща на $\angle ALB$ (поради $AR = RB$ в k), следователно LR е симетрала на AO и исканото следва.

(Можем въобще да не използваме точката M и резултата от а), ако видим, че $\angle AOR = \angle APR = \angle BAC + \frac{\angle ACB}{2} = \angle BAC + \angle BAR = \angle OAR$, че $\angle LAO = \angle CBO$, $\angle LOA = \angle COB$ и че $\triangle BCR \cong \triangle OCR$ по обща страна и два ъгъла.)

Оценяване. (7 точки) 5 т. за а), от които по 1 т. за $\angle MAC = \angle BAC$, $\angle AMR = \angle BMR$ и $\angle ABL = \angle MBL$ и 2 т. за довършване; 2 т. за б).

Задача 2. Да се намерят всички естествени числа $n \leq 113$, за които числото $n^{37} - 11^{41} + 3$ се дели на 113.

Решение. Всички сравнения са по модул 113. Пресмятаме $11^2 \equiv 8 \equiv 2^3$, $11^{41} \equiv 11 \cdot 2^{60} \equiv 11 \cdot 2^4 \cdot (2^7)^8 \equiv 63 \cdot 15^8 \equiv 63 \cdot 225^4 \equiv 63 \cdot (-1)^4 \equiv 63$. Значи непременно $n^{37} \equiv 60$, откъдето $n^{111} \equiv 60^3 \equiv 57$ (n не се дели на 113, понеже 57 не се дели) и значи $n^{112} \equiv 57n$. Малката теорема на Ферма (числото 113 е просто, понеже не се дели на никое просто число, ненадминаващо $\lfloor\sqrt{113}\rfloor = 10$) сега води до $57n \equiv 1 \equiv 114$, откъдето $n \equiv 2$. С други думи, до момента сме доказали, че няма възможни n освен евентуално $n = 2$ и остава да проверим, че $n = 2$ наистина изпълнява даденото, т.е. че $2^{37} \equiv 60$. За тази цел пресмятаме $2^{37} \equiv (2^7)^5 \cdot 2^2 \equiv 15^5 \cdot 4 \equiv 225^2 \cdot 60 \equiv (-1)^2 \cdot 60 \equiv 60$.

Оценяване. (7 точки) 0 т. за пресмятания на 37-ми степени без съществени изводи; 1 т. за пресмятане на $11^{41} \pmod{113}$; 1 т. за проверка, че $n = 2$ е решение; 2 т. за повдигане на даденото на трета степен; 1 т. за използване на $n^{112} \equiv 1 \pmod{113}$; 2 т. за обосновка защо няма други решения на $57n \equiv 1$.

Задача 3. В правоъгълна координатна система има летище във всяка точка $(x; y)$, за която x, y са цели числа с абсолютна стойност, ненадхвърляща 22. Други летища няма. Отначало във всяко летище има по един самолет. Всеки ден всеки самолет извършва праволинеен полет с дължина $\sqrt{2}$, кацайки пак в летище. След 33 дни самолети имало в точно L от летищата. Определете най-малката и най-голямата възможна стойност на L.

Решение. Ще казваме, че летище с координати $(x; y)$ е от тип ЧЧ, ако x и y са четни; от тип НН, ако са нечетни; от тип ЧН, ако x е четно, а y – не; от тип НЧ, ако y е четно, а x – не. Полетите са от ЧЧ към НН; от НН към ЧЧ; от ЧН към НЧ; от НЧ към ЧН. Така винаги ще има самолети в поне едно летище от всеки от четирите типа. Може самолети да има само в летищата $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 0)$ и $(1; 1)$; за целта трябва полетите да са в посока към тях и когато ги достигнат (което ще стане с най-много 22 полета), да летят из тях. По този начин най-малката възможна стойност на L е 4.

Всеки полет променя четността на x, така че след 33 полета в 23.45-те летища с четен x са само 22.45-те самолета, чийто x отначало е бил нечетен, т.е. поне 45 летища са незаети. Остава да се уверим, че незаетите могат да са точно толкова. Да разгледаме летищата $(x; y)$, за които $2n - 1 \leq \max(x; y) \leq 2n$ и $\min(|x|; |y|) < 2n$, $n = 1, 2, \ldots, 11$; една възможна схема за полети $(x; y) \to (x'; y')$ е:

- ако $x = 2n$ (и $|y| < 2n$), то $x' = 2n - 1$ и $y' = y + 1$;
- ако $x = 2n - 1$ и $y < 2n - 1$, то $x' = 2n$ и $y' = y + 1$;
- ако $y = 2n$ (и $|x| < 2n$), то $y' = 2n - 1$ и $x' = x - 1$;
- ако $y = 2n - 1$ и $x > 1 - 2n$, то $y' = 2n$ и $x' = x - 1$;
- ако $x = -2n$ (и $|y| < 2n$), то $x' = 1 - 2n$ и $y' = y - 1$;
- ако $x = 1 - 2n$ и $y > 1 - 2n$, то $x' = -2n$ и $y' = y - 1$;
- ако $y = -2n$ (и $|x| < 2n$), то $y' = 1 - 2n$ и $x' = x + 1$;
- ако $y = 1 - 2n$ и $x < 2n - 1$, то $y' = -2n$ и $x' = x + 1$.

Това гарантира постоянна запълненост на всички летища освен на 45-те с координати $(2n; \pm 2n)$ и $(-2n; \pm 2n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, 11$. Следователно най-голямата възможна стойност на L е $45^2 - 45 = 1980$.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за доказване, че $L \geq 4$; 1 т. за метод за получаване на $L = 4$; 1 т. за доказване, че $L \leq 1980$; 3 т. за метод за $L = 1980$.

Задачите са предложени от: Зад. 1, 2 – Мирослав Маринов, зад. 3 – Ивайло Кортезов.