Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

---

71. Национална Олимпиада по математика

Условия, кратки решения и критерии за оценяване, първи ден

Задача 1. Бял равностранен триъгълник T със страна 2022 е разделен на равностранни триъгълници със страна 1 (клетки) чрез прави, успоредни на страните на T. Две клетки ще наричаме *съседни*, ако имат поне един общ връх. Иван оцветява някои от клетките в черно. Без да вижда кои клетки са черни, Петър само веднъж избира множество S от клетки (поне една) и пита Иван дали броят черни измежду избраните е четен или нечетен. След като получи отговор, Петър успява да разбере дали броят двойки разноцветни съседни клетки в T е четен или нечетен. Да се намерят всички възможни стойности на големината на S, при които това е винаги възможно без значение кои са черните клетки.

Отговор. 12120

Решение. За удобство ще пишем A вместо Иван и B вместо Петър. Основната идея разчита на следната:

Лема. В граф G с бели върхове нека A оцвети някои от върховете в черно, а B пита за четността на броя на черните в множество S от върхове, като с отговора може еднозначно да определи четността на броя разноцветни двойки съседни върхове в G. Тогава S може да бъде само множеството от всички върхове от нечетна степен в G.

Доказателство. Работим по модул 2. Записваме във всеки черен връх числото 1, във всеки бял връх числото 0 и върху всяко ребро сумата на числата във върховете му. Всеки черен връх от нечетна степен допринася с 1 към сумата от числата върху ребрата, всеки черен връх от четна степен с 0, всеки бял връх също с 0. Следователно сумата от числата върху ребрата в G е със същата четност като тази на броя черни върхове от нечетна степен в G. Така при въпрос с множеството N от върховете от нечетна степен сме готови; обратно, при въпрос с множество, различно от N, не можем да възстановим еднозначно четността на броя черни върхове в N. С това лемата е доказана.

Остава да преброим броя на клетките с нечетен брой съседи в T. Всяка клетка, която няма обща точка с периметъра на T, има 12 съседа. Трите клетки по периметъра, всяка от които е съсед по страна на ъглова клетка в T, имат по 6 съседа. Всяка клетка със страна върху периметъра има 7 съседа и всяка клетка с връх (но не и страна) върху периметъра (освен гореспоменатите три) има 9 съседа. Понеже всяка страна на T има поне една обща точка с $2 \cdot 2022 - 1$ клетки, а всеки две страни имат по две общи клетки (като само една е от нечетна степен), търсеният брой е $3 \cdot (2 \cdot 2022 - 5) + 3 = 12120$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за твърдението на лемата (може и конкретно за T), 3 т. за доказателство, че множеството от нечетните клетки върши работа (от които 1 т. за подходящо кодиране), 2 т. за опровергаване на всяко друго множество, 1 т. за преброяване на клетките с нечетен брой съседи в T.

Задача 2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC със среда M на страната AB. Окръжност през точките B и C пресича отсечките CM и BM в точките P и Q, съответно. Точката K е симетрична на P относно M. Описаните около триъгълниците AKM и CQM окръжности се пресичат за втори път в точка X, а описаните около триъгълниците AMC и KMQ окръжности се пресичат за втори път в точка Y. Отсечките BP и CQ се пресичат в точка T. Да се докаже, че MT е допирателна към описаната около триъгълника MXY окръжност.

Решение. (Първи начин, А. Иванов) Явно $AKBP$ е успоредник, откъдето с вписания $BQPC$ получаваме $\angle AKC = \angle KPB = \angle AQC = \varphi$, т.е. $AKQC$ е вписан – нека центърът му е O. Тогава $\angle AYC = (180^\circ - \angle AYM) + (180^\circ - \angle CYM) = \angle AKM + \angle CQM = 2\varphi = \angle AOC$, т.е. $AOYC$ е вписан. Оттук $\angle OYM = \angle CYM - \angle CYO = (360^\circ - \angle AYC - \angle AYM) - \angle CAO = 180^\circ - \varphi - (90^\circ - \varphi) = 90^\circ$ и аналогично $\angle OXM = 90^\circ$. Сега ако $TM \cap AK = T'$, то $TM = MT'$ от успоредника $AKBP$ и сега обратната теорема за пеперудата в $AKQC$ дава $OM \perp TT'$, т.е. $OM \perp MT$. Следователно MT е перпендикулярна на диаметъра OM на окръжността около MXY и исканото следва.

(Втори начин, М. Маринов) Явно $AKBP$ е успоредник, откъдето с вписания $BQPC$ получаваме $\angle AKC = \angle KPB = \angle AQC$, т.е. $AKQC$ е вписан – нека центърът му е O. Да разгледаме композицията f от инверсия с център M и радиус $\sqrt{MA \cdot MQ} = \sqrt{MC \cdot MK}$ и симетрия относно точката M. Да означим $AK \cap CQ = X'$ и $AC \cap KQ = Y'$. Тогава $f(A) = Q$, $f(C) = K$ и от свойствата на инверсията следва $f(X) = X'$ и $f(Y) = Y'$. Тъй като правата TM (която минава през центъра M на инверсията и симетрията) остава в себе си, исканото е еквивалентно на $TM \parallel X'Y'$. От теоремата на Брокар за вписания $AKQC$ имаме $OM \perp X'Y'$ и значи остава да докажем, че $OM \perp MT$. Ако $TM \cap AK = T'$, то $TM = MT'$ от успоредника $AKBP$ и сега обратната теорема за пеперудата в $AKQC$ дава $OM \perp TT'$, с което исканото следва.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $AKQC$ вписан, 3 т. за свеждане до $\angle OMT = 90^\circ$ (при първия начин: 1 т. за $AOYC$ вписан (или аналогичен четириъгълник), 1 т. за $\angle OXM = \angle OYM = 90^\circ$ и 1 т. за идеята диаметър да е перпендикулярен на допирателна; при втория начин: 1 т. за дефиниране на f, 1 т. за $TM \parallel X'Y'$ и 1 т. за прилагане на Брокар в $AKQC$), 1 т. за $MT' = MT$ и 2 т. за довършване (напр. с теоремата за пеперудата).

Задача 3. Нека $x > y > 2022$ са естествени числа, такива че $xy + x + y$ е точен квадрат. Възможно ли е за всяко естествено z в интервала $[x + 3y + 1, 3x + y + 1]$ числата $x + y + z$ и $x^2 + xy + y^2$ да не са взаимнопрости?

Решение. Не е възможно! Да положим $k = \sqrt{xy + x + y}$ и $z = x + y + 2k + 1$. Тъй като

$$y < \sqrt{y^2 + 2y} \leq \sqrt{xy + x + y} = k \leq \sqrt{x^2 + 2x} < x + 1, \quad \Longrightarrow \quad k \in (y, x],$$

откъдето $z \in (x + 3y + 1, 3x + y + 1]$. Лесно се проверява, че $xy + yz + zx = (x + y + k)^2$ и $xy + yz + zx + x + y + z = (x + y + k + 1)^2$. Да допуснем, че съществува просто число p, за което $p | (x + y + z, x^2 + xy + y^2)$. Тогава $x + y \equiv -z \pmod{p}$ и значи $x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy \equiv -xy - yz - zx \pmod{p}$.Така получаваме, че $p | xy + yz + zx$ и $p | x + y + z$, т.е $p | (x + y + k)^2$ и $p | (x + y + k + 1)^2$, което е противоречие.

Оценяване. 2 точки за $z = x + y + 2k + 1$, по 1 точка за всяко от тъждествата $xy + yz + zx = (x + y + k)^2$ и $x + y + z + xy + yz + zx = (x + y + k + 1)^2$ и 3 точки за довършване. За преобразувания на дадените изрази не се присъждат точки.

Задачите са предложени от:

зад. 1 – Александър Иванов, зад. 2 – Александър Иванов и Мирослав Маринов, зад. 3 – Александър Иванов и Кристиян Василев