Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Национално зимно математическо състезание

София, 28 януари 2023 г.

София, 2023 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. За всяко от числата

$$A = \sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{48}+\sqrt{112}}$$

и

$$B = \frac{1}{\sqrt{7}}\left(\frac{1}{\sqrt{63}+\sqrt{65}} + \frac{1}{\sqrt{65}+\sqrt{67}} + \frac{1}{\sqrt{67}+\sqrt{69}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2023}}\right)$$

проверете изпълнява ли неравенството $(\sqrt{15}-\sqrt{5}-\sqrt{3})x > \sqrt{600}-\sqrt{200}-\sqrt{120}$.

Решение. Пресмятаме $A = \sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\sqrt{4(\sqrt{3}+\sqrt{7})} = 2\sqrt{\sqrt{7}^2-\sqrt{3}^2} = 2\sqrt{4} = 4$ и

$$B = \frac{1}{\sqrt{7}}\left(\frac{\sqrt{65}-\sqrt{63}}{65-63} + \frac{\sqrt{67}-\sqrt{65}}{67-65} + \cdots + \frac{\sqrt{2023}-\sqrt{2021}}{2023-2021}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{7}}(\sqrt{2023}-\sqrt{63}) = \frac{1}{2\sqrt{7}}(17\sqrt{7}-3\sqrt{7}) = 7.$$

Неравенството има вида $(\sqrt{15}-\sqrt{5}-\sqrt{3})x > \sqrt{40}(\sqrt{15}-\sqrt{5}-\sqrt{3})$. Тъй като $\sqrt{15} < \sqrt{5}+\sqrt{3} \iff 15 < 8+2\sqrt{15} \iff 7 < 2\sqrt{15} \iff 49 < 60$, след разделяне на $\sqrt{15}-\sqrt{5}-\sqrt{3} < 0$ неравенството добива вида $x < \sqrt{40}$. То се изпълнява от A (понеже $4^2 < 40$) и не се изпълнява от B (понеже $7^2 > 40$).

Оценяване. (6 точки) 1 т. за пресмятане на A, 2 т. за пресмятане на B, 1 т. за разделяне (с пълна обосновка) на $\sqrt{15}-\sqrt{5}-\sqrt{3} < 0$, по 1 т. за правилна проверка на неравенството при $x = A$ и $x = B$.

Задача 8.2. Даден е успоредник $ABCD$ с $2\measuredangle ADB < \measuredangle ABD < 90^\circ$. Точката K е такава, че $AK \perp BD$ и $CK \parallel BD$. Да се докаже, че $CK > AB$.

Решение. Нека $AC \cap BD = O$ и $AK \cap BD = L$. Явно $\measuredangle ADB < \measuredangle ABD$, т.е. $AB < AD$ и $\measuredangle AOB < 90^\circ$, съответно L е вътрешна точка за отсечката BO.
Нека E е средата на AB. Тогава OL е средна отсечка в ACK и LE е медиана към хипотенузата в правоъгълния ABL – значи е достатъчно да сравним OL и LE. Явно OE е средна отсечка в триъгълника ABD, откъдето $\measuredangle OEL = \measuredangle BLE - \measuredangle BOE = \measuredangle ABD - \measuredangle ADB > \measuredangle ADB = \measuredangle LOE$ – следователно $OL > LE$, т.е. $CK > AB$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за въвеждането на R и $\triangle MGP \cong \triangle BRP$; 1 т. за $BR = MG = \frac{2}{3}MN$ и $GR = 2GP = \frac{2}{3}CP$; 1 т. за предположението, че BGR е правоъгълен триъгълник понеже страните му са $\frac{2}{3}$ от CP, BQ и MN; 1 т. за обосновка, че ако триъгълник със страни $\frac{2}{3}a$, $\frac{2}{3}b$, $\frac{2}{3}c$ е правоъгълен то този с a, b, c също е; 1 т. за случая $\measuredangle BGR = 90^\circ$; общо 1 т. за случаите $\measuredangle GBR = 90^\circ$ и $\measuredangle BRG = 90^\circ$ (точката не се присъжда, ако поне един е пропуснат). Не се отнема точка при липса на аргументи, че ъглите 65° и 90° наистина се реализират.

Задача 8.3. Куб $77 \times 77 \times 77$ е изцяло запълнен с хоризонтални тухли $3 \times 1 \times 1$ (и/или $1 \times 3 \times 1$), вертикални тухли $1 \times 1 \times 4$ и/или единични тухли $1 \times 1 \times 1$ (някои от типовете могат и да липсват). Намерете най-малкия възможен брой единични тухли.

Отговор. 1.

Решение. Може единичната тухла да е само една – запълваме първите 76 етажа с вертикални тухли, а последния етаж така: първите 72 колони с $3 \times 1 \times 1$; първите 72 реда от остатъка с $1 \times 3 \times 1$; накрая поставяме единична тухла в центъра на остатъка $5 \times 5 \times 1$ и я заобикаляме с две двойки $3 \times 1 \times 1$ и две двойки $1 \times 3 \times 1$.

Да допуснем, че има възможно запълване без единични тухли. Ако в него има x хоризонтални и y вертикални тухли, то обемът 77^3 на куба е равен на $3x + 4y$, така че x дава остатък 3 при деление с 4.

На всеки етаж номерираме поред редовете от 1 до 77 и колоните от 1 до 77. Оцветяваме в синьо всяка клетка, при която сборът на (номерата на) реда и колоната е кратен на 3; останалите клетки са бели. Всяка хоризонтална тухла има точно една синя клетка, а всяка вертикална има 0 или 4 сини. Тогава според началното наблюдение броят сини клетки има остатък 3 при деление с 4. Но този брой е всъщност $77 \cdot (2(2+5+8+\ldots+74)+77) = 77 \cdot 1977$, където и двата множителя дават остатък 1 при деление с 4, противоречие.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за пример за покритие с една единична тухла и 5 т. за доказателство, че поне една такава е необходима.

Задача 8.4. Естествено число ще наричаме *кокосово*, ако се дели на 357 и в десетичния му запис се срещат само цифрите 0, 1 и 2 (някои може да липсват), като цифрата 2 се среща най-много веднъж.

а) Кокосово ли е 20-цифреното число $100\ldots002111$? (На местата на точките стоят само нули.)

б) Да се намерят всички цели неотрицателни числа k, за които съществува кокосово число с точно k единици в десетичния му запис.

Отговор. а) да б) всички $k \geq 3$, които дават остатък 0 или 1 при деление на 3.

Решение. Относно делимостта на $357 = 3 \cdot 7 \cdot 17$, достатъчно е числото да се дели на всяко от 3, 7 и 17 поотделно.

а) Числото е равно на $10^{19}+2111$ и явно съдържа само нули, единици и една двойка. Сумата от цифрите му е 6, така че се дели на 3. За 7 имаме $10^6 \equiv 3^6 \equiv 1 \pmod 7$, съответно $10^{19} = (10^6)^3 \cdot 10 \equiv 3 \pmod 7$ и $10^{19} + 2111 \equiv 3 + 2111 \equiv 0 \pmod 7$. За 17 имаме $10^2 \equiv -2 \pmod{17}$ и $10^{19} + 2111 \equiv 10 \cdot (-2)^9 + 2111 \equiv -3009 \equiv 0 \pmod{17}$.

б) Нека A е число с исканото свойство. При $k = 0$ сумата от цифрите е 2, а за $k \geq 1$ сумата от цифрите е k или $k + 2$. Следователно ако $k = 0$ или k дава остатък 2 при деление на 3, то A всъщност не се дели на 3, противоречие.

Сега ще докажем, че за $k = 1$ няма решение. Понеже окончаващи нули не влияят на делимостта на $3 \cdot 7 \cdot 17$, можем да считаме, че първата и последната цифра са 1 и 2 в някакъв ред, а всички останали са нули. Ако старшата цифра е 1, то разглеждаме $10^x + 2 \equiv 0 \pmod{3 \cdot 7 \cdot 17}$. От модул 7 получаваме (с проверка на 10, 10^2, …, $10^6 \equiv 1$), че x е нечетно и сега с проверка на $x = 1, 3, \ldots, 15, 17$ (като $10^{17} \equiv 10 \pmod{17}$) виждаме, че няма решение. Ако старшата цифра е 2, то разглеждаме $2 \cdot 10^x + 1 \equiv 0 \pmod{3 \cdot 7 \cdot 17}$, като по модул 7 искаме $3^x \equiv 3 \pmod 7$, т.е. отново x е нечетно – и сега с проверка на $x = 1, 3, \ldots, 15, 17$ (като $10^{17} \equiv 10 \pmod{17}$) виждаме, че няма решение.

За да покажем, че всички други k работят, действаме така: ако намерим възможно B с три единици и без двойка, то чрез долепяне на $\frac{k}{3}$ копия на B получаваме решение за всяко k кратно на 3, а чрез долепяне на $\frac{k-4}{3}$ копия на B и числото от а) получаваме решение за всяко $k \geq 4$ с остатък 1 при деление на 3.
Остава да намерим решение на сравнението $10^x + 11 \equiv 0 \pmod{3 \cdot 7 \cdot 17}$. По модул 3 работи всяко x, по модул 7 искаме $3^x \equiv 3 \pmod 7$, т.е. $x \equiv 1 \pmod 6$ е достатъчно условие. По модул 17 с пресмятания (предвид $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$) намираме $x \equiv 5 \pmod{16}$ като достатъчно условие. Значи $x = 37$ работи.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за а); 6 т. за б), от които: 1 т. за отхвърляне на 0 и числата с остатък 2 при деление на 3, 2 т. за отхвърляне на $k = 1$ (по 1 т. за всеки от двата случая), 1 т. за свеждане на останалите до $k = 3$; 2 т. за намиране на пример при $k = 3$ (от които 1 т. ако не е даден пример, но е намерено достатъчно условие по модул 16).

Задача 9.1. Всеки от класовете в едно училище има поне двама и по-малко от 2024 ученика. В един от класовете на всеки един от учениците е дадена торба с 2024 еднакви топки, 2023 от които са бели, а останалата – черна. Класът ще получи награда, ако всеки ученик изтегли без да гледа една топка от торбата си, като нито един не изтегли черна. Отличникът на класа смята, че вероятността да спечелят ще се увеличи, ако преди тегленето тайно разменят топките така, че черните топки от всички торби да отидат в торбата на отличника, а на тяхно място той да им върне по една бяла топка от неговата торба.
За какъв брой ученици в класа отличникът е прав?

Решение. Ще докажем, че отличникът винаги греши. Нека класът има t на брой ученици. По условие $2 \leq t < 2024$.

Вероятността никой ученик да не изтегли черна топка е $P_1 = \left(1 - \dfrac{1}{2024}\right)^t$.
Вероятността отличникът да не изтегли черна топка, ако всички черни топки са в торбата му е $P_2 = 1 - \dfrac{t}{2024}$.
Трябва да сравним P_1 и P_2. Нека за удобство $y = \frac{2023}{2024}$. Имаме $0 < y < 1$ и значи:

$$t = 1 + 1 + ... + 1 > 1 + y + y^2 + ... + y^{t-1}.$$

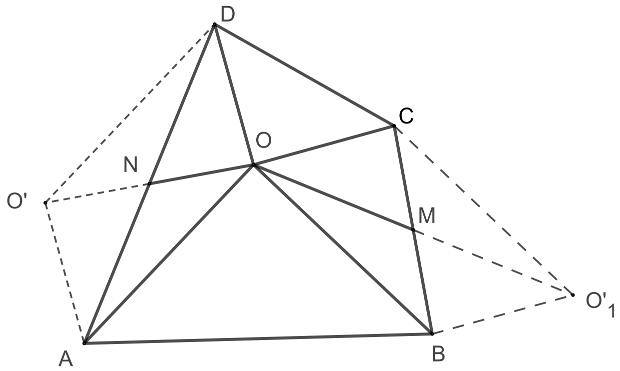
Да умножим и разделим дясната страна на $(1 - y)$. Получаваме:

$$t > 1 + y + y^2 + ... + y^{t-1} = \frac{(1 + y + y^2 + ... + y^{t-1}) - (y + y^2 + ... + y^t)}{1 - y} = \frac{1 - y^t}{1 - y}.$$

Преобразуваме до $t(1 - y) > 1 - y^t$ или $y^t > 1 - t(1 - y)$. Това е точно $P_1 > P_2$.

Оценяване. (6 точки) По 1 т. за P_1 и P_2; 3 т. за правилното им сравняване; 1 т. за отговор.

Коментар. Неравенството, което доказахме е по същество неравенство на Бернули, което намира широко приложение при оценката на експоненциални функции.



Задача 9.2. Даден е четириъгълник $ABCD$. Точка O от вътрешността на четириъгълника е такава, че триъгълниците ABO и CDO са равнобедрени и правоъгълни с прав ъгъл при върха O. Да се докаже, че $AD = 2 \cdot OM$, където точката M е средата на страната BC.

Решение. (Първи начин) Нека означим с N средата на страната AD. Понеже триъгълниците ABO и CDO са правоъгълни, то за триъгълниците BCO и ADO имаме $AO = BO = a$, $CO = DO = b$ и $\measuredangle AOD = 180^\circ - \varphi$, където $\measuredangle BOC = \varphi$.
Построяваме точките O' и O'_1, симетрични на точка O съответно относно точките N и M $\big(ON = O'N$ и $OM = O'_1M\big)$. Тогава фигурите BO'_1CO и $ODO'A$ са успоредници и диагоналите им се разполовяват съответно в точките M и N. Освен това двойките триъгълници BO'_1O, ODA и BCO, $OO'A$ са еднакви, т.е. имаме $BC = 2ON$ и $AD = 2OM$.

(Втори начин) Построяваме точката B' симетрична на B относно точката O. Тогава $\triangle AOD \cong \triangle B'OC$ и $AD = B'C$ като съответни елементи. Но $OM = B'C/2$ като средна отсечка в $\triangle B'BC$ и значи $AD = 2OM$.
Оценяване. (6 точки) *(Първи начин)* 3 т. за получаване на конструкция, в която отсечките OM и ON са половини от диагонали на един успоредник; 3 т. за получаване на $AD = 2OM$. *(Втори начин)* 3 т. за построяване на B'; 3 т. за получаване на $AD = 2OM$.

Задача 9.3. Да се намерят всички стойности на параметъра a, за които уравнението

$$kn^2 + (2k+1)n + k^2 = a$$

има безброй много двойки цели решения (k, n).

Решение. Да разгледаме уравнението като квадратно по k. Дискриминантата му е $D = (n^2 + 2n)^2 - 4(n-a)$. Но за достатъчно големи положителни стойности на n, D се намира между два съседни точни квадрата: $(n^2+2n-1)^2$ и $(n^2+2n)^2$, а за достатъчно малки отрицателни стойности – между двата съседни квадрата $(n^2+2n+1)^2$ и $(n^2+2n)^2$. Следователно цели решения няма. В останалите краен брой случаи за n, то има най-много по две решения. Ето защо не съществува a с търсеното свойство.

Оценяване. (7 точки) 2т. за пресмятане на дискриминантата; 3т. за липса на решения при достатъчно големи n; 1т. за ограничени n; 1т. за отговор.

Задача 9.4. Нека a, b, c са три положителни реални числа, за които $a+b+c=1$. Да се докаже, че

$$abc\left(3+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geq \frac{10}{9}.$$

Решение. Лесно се вижда, че има равенство, когато $a=b=c=1/3$. Ще пренапишем неравенството, използвайки $u=a+b+c=1$, $v=ab+ac+bc$, $w=abc$. Умножавайки по w, получаваме

$$3w^2+(v^2-2wu)=3w^2+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 \geq \frac{10}{9}w.$$

С други думи, тъй като $u=1$, трябва да докажем, че $3w^2-28/9w+v^2 \geq 0$. При фиксирани $u=1, v$, получаваме квадратен тричлен за w, който се минимизира, когато w е максимално (тук използваме $0 \leq w \leq 1/27$ по СА-СГ). Според UVW метода, ако фиксираме u, v, то w се максимизира, когато две от числата a, b, c са равни: нека $a=b$, $c=1-2a$. След заместване на $w=a^2(1-2a), v=a(2-3a)$ и опростяване, получаваме

$$f(a):=12a^4-12a^3+12a^2-\frac{52}{9}a+\frac{8}{9} \geq 0.$$

Тъй като $f(1/3)=0$ (случай на равенство!), и очакваме $1/3$ да е двоен корен (защо?) разлагаме f по схемата на Хорнер: $f(a)=4(a-1/3)^2(3a^2-a+2)$, така че $f(a) \geq 0$, което трябваше да се докаже.

Второ решение. Неравенството е еквивалентно на $27a^3b^3c^3+9abc(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq 10a^2b^2c^2$, а значи и на $27a^3b^3c^3+9abc(a+b+c)^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq 10(a+b+c)^3a^2b^2c^2$. След разкриване на скобите получаваме еквивалентното

$$9S(5,3,1)+9S(4,4,1)-12S(4,3,2)-5S(5,2,2)-S(3,3,3) \geq 0$$

където $S(x,y,z)=a^xb^yc^z+a^xb^zc^y+a^yb^xc^z+a^yb^zc^x+a^zb^xc^y+a^zb^yc^x$. От неравенството на Мюрхед следва $S(5,3,1) \geq S(5,2,2)$, $S(5,3,1) \geq S(4,4,1) \geq S(4,3,2)$ и $S(4,4,1) \geq S(3,3,3)$, а оттук и желаното неравенство.

Оценяване. (7 точки) За първото решение: 1 т. за случай на равенство (само ако няма нищо друго); 1 т. за хомогенизация; 4 т. за стигане до $f(a)$; 2 т. за довършване. За второто решение: 1 т. за случай на равенство (само ако няма нищо друго); 1 т. за хомогенизация; 1 т. за ясна цел да се разкрият скобите и да се използва неравенство на Мюрхед; 4 т. за довършване.

Задача 10.1. Да се намерят всички реални x, за които

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+13}+\sqrt{x^2+4x+8}}=\frac{1}{10}.$$

Решение. Нека положим $u=x^2+4x+4=(x+2)^2$. Като рационализираме лявата страна получаваме $(\sqrt{u+9}-\sqrt{u+4})/5$, тоест трябва да решим

$$\sqrt{u+9}=\frac{1}{2}+\sqrt{u+4}.$$

И двете страни са положителни, така че при вдигане на квадрат и опростяване получаваме еквивалентно уравнение

$$\sqrt{u+4}=\frac{19}{4}.$$

Двете страни са положителни, така че можем да вдигнем на квадрат отново и да получим $u=(19^2-8^2)/4^2$, или $(x+2)^2=9\cdot\dfrac{33}{16}$, тоест $x_{1,2}=-2\pm\dfrac{3}{4}\sqrt{33}$.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за решаване спрямо u; 2т. за изразяване на решението чрез x; 1т. за проверка.

Задача 10.2. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$ в който може да се впише окръжност. Нека P е пресечната точка на диагоналите му AC и BD, а O_1, O_2, O_3 и O_4 са центровете на вписаните окръжности съответно в триъгълниците PDC, PCB, PBA и PAD. Да се докаже, че втората пресечна точка на описаните окръжности около $\triangle PO_1O_2$ и $\triangle PO_3O_4$ лежи върху BD.

Решение. Тъй като триъгълниците PO_1O_2 и PO_3O_4 са правоъгълни, а общият им връх P лежи върху BD, то достатъчно е да докажем, че правата през средите на отсечките O_1O_2 и O_3O_4 е перпендикулярна на BD. Да означим с T, R, L и K проекциите на O_1, O_2, O_3 и O_4 върху BD. Тогава

$$PK=\frac{PA+PD-AD}{2};\ PT=\frac{PC+PD-CD}{2}\ \Rightarrow\ PK-PT=\frac{PA-PC+CD-AD}{2}.$$

Аналогично

$$PL=\frac{PA+PB-AB}{2};\ PR=\frac{PB+PC-BC}{2}\ \Rightarrow\ PL-PR=\frac{PA-PC+BC-AB}{2}.$$

Обединявайки горните две формули и използвайки, че $ABCD$ е описан, т.е., $CD-AD=BC-AB$, заключаваме че $PK-PT=PL-PR$. Оттук, средите на KL и TR съвпадат и значи средите на O_1O_2 и O_3O_4 се проектират върху BD в една и съща точка (общата среда). Задачата е доказана.

Оценяване. (6 точки) 1т. за разглеждане на проекциите върху BD; 3т. за доказателство, че средите на KL и TR съвпадат; 1 т. за следствието, че правата през средите на отсечките O_1O_2 и O_3O_4 е перпендикулярна на BD; 1т. за довършване.

Коментар. Твърдението е вярно и в обратната посока, т.е., ако втората пресечна точка на описаните окръжности около $\triangle PO_1O_2$ и $\triangle PO_3O_4$ лежи върху BD, то $ABCD$ е описан.

Задача 10.3. Една редица от нули и единици с дължина 2023 ще наричаме *великолепна седморка*, ако съдържа поне седем последователни единици в записа си. Една редица от нули и единици с дължина 2024 ще наричаме *омразна осморка*, ако съдържа поне осем последователни еднакви елементи (нули или единици) в записа си. Да се намери отношението на броя на великолепните седморки към този на омразните осморки.

Отговор. $1:2$.

Решение. Да разгледаме задачата за произволна дължина на редиците (n и $n+1$, като в конкретния случай, имаме $n = 2023$) и произволна последователност k от единици (в случая $k = 7$). Твърдим, че винаги броят на двоичните редици с дължина n, съдържащи поне k последователни единици е половината от броя на двоичните редици с дължина $n+1$, съдържащи поне $k+1$ последователни еднакви елементи. За целта, на всяка редица от първия вид ще съпоставим взаимно еднозначно двойка редици от втория. Въвеждаме бинарната операция XNOR $\oplus$, която е:

x	y	$x \oplus y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

За всяка двоична редица $a = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ с дължина n дефинираме нейната XNOR наследничка $b = \{b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}\}$, където $b_i = a_i \oplus a_{i+1}$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Лесно се съобразява, че на всяка двойка редици $(a, \bar{a})$, където $\bar{a}$ е редицата, нямаща общ елемент с a съответства точно една XNOR наследничка, както и обратното всяка редица с дължина $n-1$ е XNOR наследничка на точно две редици (взаимни отрицания една на друга). Остава да съобразим, че двоична редица с дължина n съдържа поне k последователни единици тогава и само тогава, когато е XNOR наследница на двойка двоични редици с дължина $n+1$, съдържащи поне $k+1$ последователни еднакви елементи. С това задачата е решена.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за отговор; не повече от 1 т. за неработеща инекция/биекция; 3 т. за построяване на работеща биекция; 3 т. за ясна проверка, че тя работи.

Задача 10.4. а) Съществува ли едноцифрено естествено число k, за което съществуват рационални числа a и b, такива че $a^3 + b^3 = 7k + 3$?

б) Съществува ли двуцифрено естествено число k, за което съществуват положителни рационални числа a и b, такива че $a^3 + b^3 = 7k + 3$?

Отговор. а) Да, например $k = 2$, $(x, y) = (-1/7, 18/7)$.
б) Да, например $k = 24$, $(x, y) = (20/7, 37/7)$.

Решение. Да анализираме общата задача

$$a^3 + b^3 = 7k + 3, \quad a, b \in \mathbb{Q}.$$

Тъй като $x^3 \equiv \{0, \pm 1\} \pmod 7$, то горното уравнение няма решения в цели числа. Първо ще покажем, че необходимо условие (a, b) да е решение е да имат общ знаменател в несъкратимия си вид. Наистина, нека $a = p_1/q_1$, $b = p_2/q_2$, където $(p_1, q_1) = (p_2, q_2) = 1$. Нека $d = (q_1, q_2)$ и $q_1 = dq_1'$, $q_2 = dq_2'$. Тогава е в сила равенството

$$\left(p_1 q_2'\right)^3 + \left(p_2 q_1'\right)^3 = (7k+3)\left(d q_1' q_2'\right)^3 .$$

Ако $q_1' > 1$, стигаме до противоречие по модул q_1', и аналогично за q_2'.
Следователно, без ограничение на общността $a = x/d$, $b = y/d$, където $(x, d) = (y, d) = 1$. От тук, получаваме целочисленото Диофантово уравнение

$$x^3 + y^3 = (7k+3)d^3, \qquad (x, d) = (y, d) = 1. \tag{1}$$

По модул 7 заключаваме, че $7 \mid d$, така че $d = 7d_1$. От тук, $7^3 \mid x^3 + y^3$. Да забележим, че $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$, и $x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy$, от където НОД на $x + y$ и $x^2 - xy + y^2$ е най-много $3(x, y)$, което е взаимнопросто със 7^3.
Да отбележим, че ако има решение за едно k, то има и за безбройно много k. Наистина, достатъчно е да изберем $d_1 > 1$ така, че $d_1 \equiv 1 \pmod 7$, и тогава $(7k+3)d^3 = 7\ell + 3$, като рационалната двойка решения за ℓ е рационалната двойка решения за k, умножена по d_1.
За а), забелязваме, че при $k = 2$, $7k + 3 = 17$ е просто от вид $3s + 2$. Ако искаме $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 17 \cdot 7^3 d_1^3$, то $(x, y) = 1$ и $17 \mid (x + y)$. Наистина, от $x^3 \equiv -y^3 \pmod 1 7$, следвам че $x^1 8 \equiv y^1 8 \pmod 1 7$, и по малка теорема на Ферма $x^2 \equiv y^2 \pmod 1 7$. Ако $x \equiv y \pmod 1 7$, то $17 \mid x, y$: противоречие! Следователно, $17 \mid x + y$. Ще пробваме $x + y = 17$ и $d_1 = 1$. Търсим решение на системата $x + y = 17$, $x^2 - xy + y^2 = 343$, следователно $xy = -18$, от където $x = -1, y = 18$.
За б), отново ще разгледаме опростения случай $d_1 = 1$ и $(x, y) = 1$, т.е. $x^3 + y^3 = (7k+3)7^3$. Тъй като 7^3 е голямо число, ще опитаме $7^3 \mid x^2 - xy + y^2$ (или, от $x^2 - xy + y^2 \geq 3(x+y)^2/4$, ще получим противоречие с двуцифрено k). При $x^2 - xy + y^2 = 343s$ и $x + y = (7k+3)/s$ след пресмятане на xy и анализиране на $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$ да е точен квадрат намираме решение $k = 24$, $s = 3$, $x = 20$, $y = 37$.

Оценяване. (7 точки) 3т. за а); 4т. за б). Ако няма напълно решена подточка: 1т. за (1) и 1 т. за $7 \mid d$.

Задача 11.1. Дадено е уравнението $x^3 - ax^2 + (a^2 - 1)x - a^2 + a = 0$, където a е реален параметър. Да се намерят стойностите на a, за които уравнението има три различни реални корена, които образуват аритметична прогресия.

Решение. Представяме уравнението във вида $(x-1)(x^2 + (1-a)x - a + a^2) = 0$, откъдето $x_1 = 1$. Нека x_2 и x_3 са корените на квадратното уравнение.

1 случай: Ако 1 е средният член на аритметичната прогресия, то $x_2 + x_3 = 2$ и от формулите на Виет $a - 1 = 2$, т.е. $a = 3$. При $a = 3$ корените на квадратното уравнение не са реални.

2 случай: Ако $x_1 = 1$ не е среден член, то без ограничение можем да считаме, че $1 + x_2 = 2x_3$, което заедно с $x_2 + x_3 = a - 1$ води до $3x_3 = a$. Следователно $\frac{a}{3}$ е корен на квадратното

уравнение, т.е. $\left(\frac{a}{3}\right)^2 + (1-a)\frac{a}{3} - a + a^2 = 0$, откъдето намираме $a = 0$ и $a = \frac{6}{7}$. При $a = 0$ получаваме $x_2 = -1$ и $x_3 = 0$, а при $a = \frac{6}{7}$ намираме $x_2 = -\frac{3}{7}$ и $x_3 = \frac{2}{7}$. Окончателно търсените стойности са $a = 0$ и $a = 6/7$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за представяне на уравнението във вида $(x-1)(x^2 + (1-a)x - a + a^2) = 0$ и намиране на $x_1 = 1$; 2 т. за разглеждане на 1 случай и извод, че при $a = 3$ уравнението няма реални корени; 2 т. за разглеждане на 2 случай и намиране на стойностите на a.

Задача 11.2. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, за който $\measuredangle DAB = \measuredangle ABC = \measuredangle BCD$. Нека H и O са съответно ортоцентърът и центърът на описаната окръжност за $\triangle ABC$. Да се докаже, че точките H, O и D лежат на една права.

Решение. Нека $\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$ и $\measuredangle BCA = \gamma$. От условието на задачата получаваме, че $\alpha < \beta$ и $\gamma < \beta$, откъдето $\beta > 60^\circ$. Възможни са три случая $\beta < 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$ и $\beta > 90^\circ$.

Нека $\beta < 90^\circ$. Тогава точките H и O са вътрешни за $\triangle ABC$ и $\measuredangle ACO = \measuredangle CAO = \measuredangle HCB = \measuredangle HAB = 90^\circ - \beta$. Следователно точката O е вътрешна за $\triangle HAC$ ($\measuredangle HAC = 90^\circ - \gamma > 90^\circ - \beta = \measuredangle CAO$ и $\measuredangle HCA = 90^\circ - \alpha > 90^\circ - \beta = \measuredangle ACO$) и

$$\measuredangle HAO = \beta - \gamma = \measuredangle ACD, \measuredangle HCO = \beta - \alpha = \measuredangle CAD, \measuredangle HAD = \measuredangle HCD = 2\beta - 90^\circ.$$

От синусовата теорема за $\triangle AHD$, $\triangle CHD$ и $\triangle ACD$ получаваме, че

$$\frac{\sin\measuredangle AHD}{\sin\measuredangle HAD} = \frac{AD}{HD}, \frac{\sin\measuredangle HCD}{\sin\measuredangle CHD} = \frac{HD}{CD} \text{ и } \frac{\sin\measuredangle CAD}{\sin\measuredangle ACD} = \frac{CD}{AD}.$$

Като умножим тези равенства, получаваме, че

$$\sin\measuredangle AHD . \sin\measuredangle HCD . \sin\measuredangle CAD = \sin\measuredangle HAD . \sin\measuredangle CHD . \sin\measuredangle ACD$$

т.е.

$$\sin\measuredangle AHD . \sin(2\beta - 90^\circ) . \sin(\beta - \alpha) = \sin(2\beta - 90^\circ) . \sin\measuredangle CHD . \sin(\beta - \gamma),$$

откъдето

$$\begin{aligned} & \sin\measuredangle AHD . \sin(\beta - \alpha) = \sin\measuredangle CHD . \sin(\beta - \gamma) \\ \iff\quad & \sin\measuredangle AHD \sin\measuredangle HCO . \sin\measuredangle CAO = \sin\measuredangle CHD . \sin\measuredangle HAO . \sin\measuredangle ACO. \end{aligned}$$

От синусовата форма на обратната теорема на Чева за $\triangle HAC$ следва, че правите AO, CO и HD се пресичат в една точка, т. е. точките H, O и D лежат на една права.

Нека $\beta = 90^\circ$. Тогава точките H и B съвпадат, точка O е среда на AC и $AHCD$ е правоъгълник. Следователно точките H, O и D лежат на една права.

Нека $\beta > 90^\circ$. В този случай точка B е вътрешна за $\triangle AHC$, а точка O е вътрешна за $\triangle ADC$. Аналогично на случая $\beta < 90^\circ$ се доказва, че точките H, O и D лежат на една права.

Оценяване. (6 точки) 5 т. за доказателство на първия случай: 2 т. за изразяване на ъглите и синусовите теореми за $\triangle AHD$, $\triangle CHD$ и $\triangle ACD$; 1 т. за преобразуванията и 2 т. за синусовата форма на обратната на теоремата на Чева; 1 т. за другите два случая.

Задача 11.3. Да се намери най-малкото естествено число n със следното свойство: Във всяко множество от наредени тройки от естествени числа с n елемента съществуват три тройки (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) и (c_1, c_2, c_3), за които всяко от числата $a_1 + b_1 + c_1$, $a_2 + b_2 + c_2$ и $a_3 + b_3 + c_3$ се дели на 3.

Решение. Ще казваме, че множество от наредени тройки е хубаво, ако съществуват тройки (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) и (c_1, c_2, c_3), за които всяко от числата $a_1 + b_1 + c_1$, $a_2 + b_2 + c_2$ и $a_3 + b_3 + c_3$ се дели на 3. Ще разглеждаме всички тройки по модул 3 и по този начин в множеството може да има повтарящи се елементи. Да забележим, че ако (a, b, c) се среща три пъти, то множеството е хубаво. Ако (a, b, c) се среща само веднъж и множеството не е хубаво, то след добавяне на втора тройка (a, b, c) множеството отново не е хубаво. Директно се проверява, че множеството от следните 9 различни тройки

$$(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 2, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 2, 1), (2, 0, 2), (2, 1, 1), (2, 2, 2)$$

не е хубаво. Като повторим всяка от тези тройки, ще получим множество от 18 елемента, което не е хубаво. Следователно $n \geq 18$.
Ще докажем, че всяко множество A от 19 тройки е хубаво. Ако в A има три еднакви тройки, то A е хубаво. Следователно измежду елементите на A има поне 10 различни. Ще докажем че всяко множество от 10 различни тройки е хубаво.
Да разгледаме първите 10 елемента на тези 10 тройки. Да допуснем, че между тях има пет равни (без ограничение нека те са нули) и да разгледаме тройките с първи елемент нула. Ако между вторите елементи има три равни, то без ограничение имаме тройки $(0, a, x)$, $(0, a, y)$ и $(0, a, z)$, като x, y и z са различни (защото тройките са различни), т.е. са 0, 1 и 2 в някакъв ред. Тогава тези тройки имат исканото свойство, противоречие. Следователно без ограничение тройките са $(0, 0, x)$, $(0, 0, y)$, $(0, 1, z)$, $(0, 1, t)$ и $(0, 2, w)$, където $x \neq y$ и $z \neq t$. Лесно се проверява, че поне едно от числата $x + z + w$, $x + t + w$, $y + z + w$ и $y + t + w$ се дели на 3 и отново получаваме тройки с исканото свойство.
Следователно без ограничение за първите елементи на дадените 10 тройки имаме следните възможности:
1. две нули, четири единици и четири двойки. Нека множеството е:

$$(0, a_1, b_1), (0, a_2, b_2), (1, a_3, b_3), (1, a_4, b_4), (1, a_5, b_5),$$

$$(1, a_6, b_6), (2, a_7, b_7), (2, a_8, b_8), (2, a_9, b_9), (2, a_{10}, b_{10})$$

Нека x_i да е двойката (a_i, b_i) за $i = 1, 2$, y_j да е двойката (a_j, b_j) за $j = 3, 4, 5, 6$, а z_k да е двойката (a_k, b_k) за $k = 7, 8, 9, 10$. Сбор на двойките (a, b) и (c, d) наричаме двойката $(a + c, b + d)$.
Ще докажем, че между сборовете $x_i + y_j$, $i = 1, 2$; $j = 3, 4, 5, 6$ се срещат поне 6 различни двойки. Ясно е, че двойките $x_1 + y_3$, $x_1 + y_4$, $x_1 + y_5$ и $x_1 + y_6$ са различни. Ако допуснем,

че двойките x_2+y_3, x_2+y_4, x_2+y_5 и x_2+y_6 добавят само една нова, то без ограничение $x_2+y_3=x_1+y_4$ и $x_2+y_4=x_1+y_5$. Тогава $y_3+y_5=2y_4$, което означава, че $y_3+y_4+y_5=(0,0)$, т.е. $(1,a_3,b_3)$, $(1,a_4,b_4)$ и $(1,a_5,b_5)$ е тройка с исканото свойство.
Тъй като в x_i+y_j, $i=1,2$; $j=3,4,5,6$ се срещат поне 6 различни двойки, то z_k не може да бъде двойка, за която сборът с някоя от тези 6 е $(0,0)$, т.е. за z_k остават най-много три възможности, противоречие.

2. три нули, три единици и четири двойки Нека множеството е:

$$(0,a_1,b_1),(0,a_2,b_2),(0,a_3,b_3),(1,a_4,b_4),(1,a_5,b_5),$$

$$(1,a_6,b_6),(2,a_7,b_7),(2,a_8,b_8),(2,a_9,b_9),(2,a_{10},b_{10})$$

Нека x_i да е двойката (a_i,b_i) за $i=1,2,3$, y_j да е двойката (a_j,b_j) за $j=4,5,6$ и z_k да е двойката (a_k,b_k) за $k=7,8,9,10$. Ще докажем, че между сборовете x_i+y_j, $i=1,2,3$, $j=4,5,6$ се срещат поне 6 различни двойки. Ако между тези сборове има три равни, то без ограничение $x_1+y_4=x_2+y_5=x_3+y_6$ и лесно се вижда, че не може да има други еднакви двойки. Ако между сборовете x_i+y_j, $i=1,2,3$, $j=4,5,6$ се срещат 5 различни двойки и няма три равни (тогава трябва да има четири двойки равни сборове), то без ограничение $x_1+p=x_2+q$ и $x_1+r=x_2+s$, където p,q,r,s са някои от y_j, като $p\neq q$ и $r\neq s$. Това означава, че $p+s=q+r$ като единствената възможност е $p\neq q=r\neq s$. Следователно $\{p,q,r\}=\{y_4,y_5,y_6\}$, като $p+s=2q$, т.е. по модул 3 $p+q+s=0$. Последното означава, че $(1,a_4,b_4),(1,a_5,b_5),(1,a_6,b_6)$ имат исканото свойство, противоречие.
Тъй като в x_i+y_j, $i=1,2$; $j=3,4,5,6$ се срещат поне 6 различни двойки, получаваме противоречие както в първия случай.

Оценяване. (7 точки) 3 точки за пример за $n=18$; 4 точки за доказване, че множество с 19 елемента е хубаво.

Задача 11.4. Разглеждаме редицата, зададена с $F_0=F_1=1$ и $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$. Да се докаже, че за всяко $n\geq 5$, числото $\varphi(F_n)$ се дели на 4.
(За всяко естествено число t с $\varphi(t)$ се означава функцията на Ойлер, т.е. броят на числата, които са по-малки от t и са взаимнопрости с t.)

Решение. За редицата на Фибоначи ще докажем, че $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=-(F_nF_{n-2}-F_{n-1}^2)$. Имаме:

$$\begin{aligned}F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=-(F_nF_{n-2}-F_{n-1}^2) &\iff (F_n+F_{n-1})F_{n-1}-F_n^2=-(F_nF_{n-2}-F_{n-1}^2)\\ &\iff F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\end{aligned}$$

От горното равенство следва:

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n.$$

Оттук получаваме $F_{n+1}F_{n-1}\equiv(-1)^n\pmod{F_n}$, а от рекурентната връзка $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ имаме $F_{n+1}\equiv F_{n-1}\pmod{F_n}$. Следователно

$$F_{n+1}^2\equiv F_{n+1}F_{n-1}\equiv(-1)^n\pmod{F_n}.$$

Нека a и b са две различни числа, които са по-малки от F_n и са взамимнопрости с F_n. Ще докажем, че множествата $A = \{a, -a, aF_{n+1}, -aF_{n+1}\}$ и $B = \{b, -b, bF_{n+1}, -bF_{n+1}\}$ по модул F_n или не се пресичат или съвпадат. Ако например $a = -bF_{n+1}$, то $-a = bF_{n+1}$, $aF_{n+1} = b(-1)^{n+1}$ и $-aF_{n+1} = b(-1)^n$. Аналогично се проверява, че ако кои да са два елемента от A и B са равни, то $A = B$. Също така всяко число, което е по-малко от F_n и е взаимнопросто с F_n се среща в някое множество от дадения вид. Следователно всички числа, които са по-малки от F_n и са взаимнопрости с F_n се разбиват на непресичащи се четворки, т.е. 4 дели $\varphi(F_n)$.

Оценяване. (7 точки) 2т. за равенството $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$; 2т. за сравненията по модул F_n; 1т. за разглеждане на множествата $\{a, -a, aF_{n+1}, -aF_{n+1}\}$; 2т. за довършване нва решението.

Задача 12.1. Да се реши уравнението:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \cdot |\sin x| + \frac{25}{4} \cdot \sin x = 0.$$

Решение. Уравнението има смисъл при $x \neq 0$. Сега ще разгледаме два случая за знака на $\sin x$.

I. Нека $\sin x \geqq 0$, т.е. $x \in [2k\pi, \pi + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$ и $|\sin x| = \sin x$. Тогава даденото уравнение добива вида

$$\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{25}{4}\right) \cdot \sin x = 0.$$

Изразът в скобите е строго положителен, следователно в този случай нашето уравнение е еквивалентно на $\sin x = 0 \ \cap \ x \neq 0$. Така решенията в *случай I.* са $x = k\pi$, където $k \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

II. Нека $\sin x < 0$, т.е. $x \in (\pi + 2l\pi, 2\pi + 2l\pi), l \in \mathbb{Z}$ и $|\sin x| = -\sin x$. Сега достигаме до

$$\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{25}{4}\right) \cdot \sin x = 0.$$

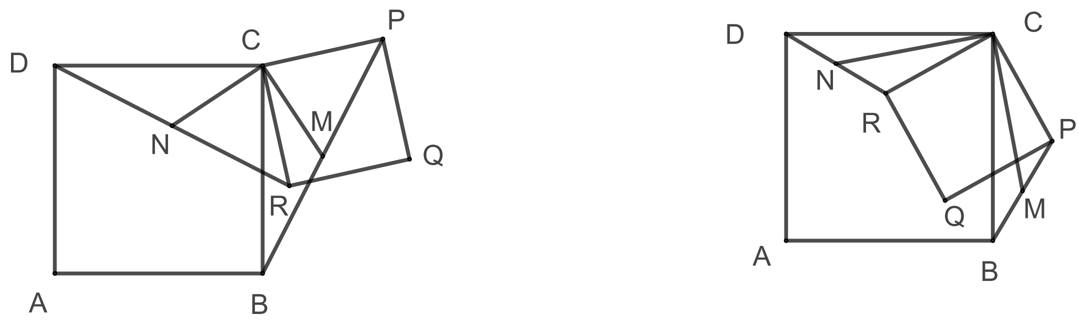
Решенията на уравнението $\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{25}{4}\right) = 0$, които принадлежат на интервалите $x \in (\pi + 2l\pi, 2\pi + 2l\pi), l \in \mathbb{Z}$ $\big($за които $\sin x < 0\big)$ ще бъдат решения на даденото уравнение в този случай.

Така последователно получаваме:
$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ или $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$; $2x^2 - 5x + 2 = 0$ или $2x^2 - 5x + 2 = 0$; $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$ или $x_3 = -2, x_4 = -\frac{1}{2}$.

Понеже числата $x_1 = 2$ и $x_2 = \dfrac{1}{2}$ лежат в интервала $(0, \pi)$ $\big(\sin x_1 > 0, \sin x_2 > 0\big)$, то те не са решения на задачата. Докато числата $x_3 = -2$ и $x_4 = -\dfrac{1}{2}$ лежат в интервала $(-\pi, 0)$ $\big(\sin x_3 < 0, \sin x_4 < 0\big)$, следователно те са решения на задачата в *случай II.*
Така окончателно получаваме, че даденото уравнение има следните решения $x = -2$, $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = k\pi$, където $k \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

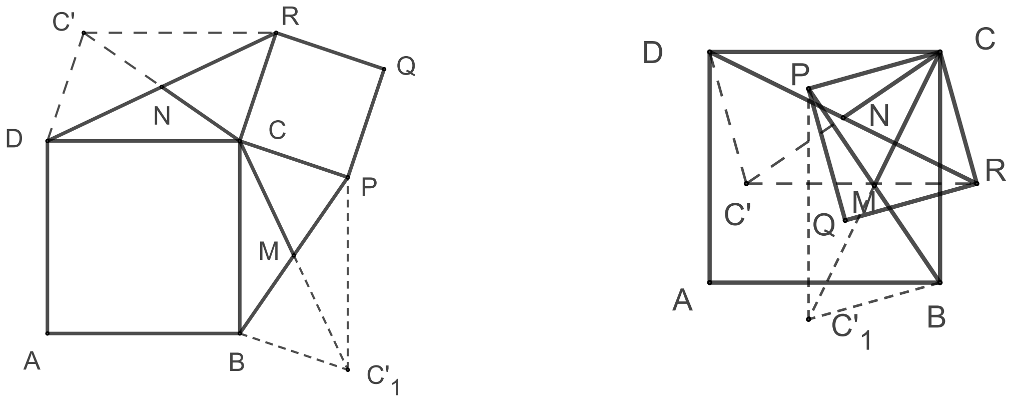
Оценяване. (6 точки) 1т. за дефиниционно множество; по 2 т. за пълното разглеждане на всеки от случаите; 1 т. за окончателен отговор.

Задача 12.2. Даден е квадрат $ABCD$ с лице $S_{ABCD} = 37$. Квадратът $CPQR$ е разположен така, че $CM = 4$ и $CN = 3$, където точките M и N са среди съответно на отсечките BP и DR. Да се намери лицето S_{CPQR} на квадрата $CPQR$.



Фигура 1: Случай 1. Случай 2.

Решение. Нека страните на двата квадрата са съответно $AB = a = \sqrt{37}$ и $CP = b$.
Ако ориентацията на двата квадрата е различна (вж. фигура 1. за всеки от случаите за припокриване), то триъгълниците BPC и DRC имат по две равни страни и ъгъл при върха C равен на $90^\circ \pm \measuredangle BCR$, т.е. триъгълниците BPC и DRC са еднакви и медианите им CM и CN са равни.
Но $4 = CM \neq CN = 3$, следователно двата квадрата са ориентирани еднакво и има два случая за припокриването на квадратите както е показано на фигура 2.
Лесно се вижда, че във всеки от случаите за триъгълниците BPC и DRC имаме $CB = CD = a$, $CP = CR = b$ и $\measuredangle DCR = 180^\circ - \varphi$, където $\measuredangle BCP = \varphi$.
Построяваме точките C' и C_1', симетрични на върха C съответно относно точките N и M. Тогава фигурите $BC_1'PC$ и $DCRC'$ са успоредници и диагоналите им се разполовяват съответно в точките M и N. Освен това двойките триъгълници BPC, $CC'D$ и DRC, $CC_1'B$



Фигура 2: Случай 1. Случай 2.

са еднакви, т.е. имаме $BP = 2CN = 6$ и $DR = 2CM = 8$. Сега в триъгълника BMC имаме $BC = \sqrt{37}$, $BM = CN = 3$ и $CM = 4$, тогава по косинусова теорема намираме $\measuredangle BMC = 120^\circ$, а от косинисова теорема за триъгълника CMP получаваме $CP = b = \sqrt{13}$. Така окончателно имаме, че $S_{CPQR} = 13$.

Оценяване. (6 точки) 1т. за достигане до правилната конфигурация и отхвърляне на възможността за различна ориентация на квадратите; 3 т. за пълното решение в първия разглеждан случай; 2 т. за решение на задачата и в другия случай.

Задача 12.3. Нека n е естествено число, което не е точен квадрат. Да се докаже, че съществува естествено число a, за което $\lim\limits_{m\to\infty} \left\{(\sqrt{n}+a)^{2m}\right\} = 1$, където $\{x\}$ е дробната част на x.

Решение. Понеже n не е точен квадрат, то числото $\sqrt{n}$ не е цяло и $0 < \{\sqrt{n}\} < 1$.
Сега нека да означим с a цялата част на $\sqrt{n}$, т.е. $a = [\ \sqrt{n}\ ] = \sqrt{n} - \{\sqrt{n}\}$. Тогава от биномната формула на Нютон имаме, че за всяко естествено число m числото $b_m = (\sqrt{n}+a)^{2m} + (\sqrt{n}-a)^{2m}$ е цяло.
Но за второто събираемо в израза за b_m имаме $(\sqrt{n}-a)^{2m} = \{\sqrt{n}\}^{2m} < 1$, следователно за цялото число b_m ще бъде изпълнено $b_m = \left[(\sqrt{n}+a)^{2m}\right] + 1$ или $(\sqrt{n}+a)^{2m} + (\sqrt{n}-a)^{2m} = \left[(\sqrt{n}+a)^{2m}\right] + 1$. Така за дробната част на израза $(\sqrt{n}+a)^{2m}$ получаваме

$$\left\{(\sqrt{n}+a)^{2m}\right\} = (\sqrt{n}+a)^{2m} - \left[(\sqrt{n}+a)^{2m}\right] = 1 - (\sqrt{n}-a)^{2m} = 1 - \left\{\sqrt{n}\right\}^{2m},$$

което при $m \to \infty$ заради $0 < \{\sqrt{n}\} < 1$ има граница равна на 1.

Оценяване. (7 точки) 2т. за избор на числото a, който води до правилни заключения; 3т. за намиране на $\left[(\sqrt{n}+a)^{2m}\right]$; 2 т. за изразяване на $\left\{(\sqrt{n}+a)^{2m}\right\}$ като сума на 1 и клоняща към 0 редица.

Задача 12.4. Даден е граф $G(V, E)$ с n върха. За всяко негово ребро $e \in E$ дефинираме *тежест* $\omega(e) := \dfrac{r}{2(r-1)}$, където r е броят върхове в максималната клика, в която участва e. Да се докаже, че

$$\sum_{e\in E} w(e) \leq \frac{n^2}{4}.$$

(Клика в G е подграф, чиито върхове са подмножество на върховете на G и всеки два от тях са свързани с ребро от G.)

Решение. Да разгледаме фунцкията $f(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{e\in E} w(e)x_i x_j, 1 \leq i < j \leq n$. Твърдим, че максимумът на f върху множеството

$$S := \{\mathbf{x} := (x_1, x_2, \ldots x_n) \ \mid \ x_i \geq 0, \ x_1 + x_2 + \ldots x_n = 1\}$$

е не по-голям от $1/4$.

Първо, ще покажем, че съществува клика в G, за която този максимум се достига. Наистина, ако i, j не са свързани в G, f, е линейна функкция на x_i и x_j., така че при фиксирано $x_i + x_j$, максимумът се достига при $x_i = 0$ или $x_j = 0$. Прилагайки този аргумент необходимият брой пъти, достигаме до $x_i = 0$, освен ако i не е свързан с всички останали върхове, т.е. имаме клика. Да означим кликата с K_ℓ. БОО върховете ѝ са от 1 до ℓ, т.е. $x_j = 0, \ j = \ell + 1, \ldots n$. Тъй като функцията $t/(2(t-1))$ е намаляваща върху $\mathbb{N}$, то всяко ребро на K_ℓ има тегло най-много $\ell/(2(\ell-1))$ (очевидно, реброто участва в K_ℓ, но няма гаранция, че тази клика е максималната за него). Следователно,

$$f(\mathbf{x}) \leq \frac{\ell}{2(\ell-1)} \sum_{1\leq i<j\leq \ell} x_i x_j.$$

Тъй като

$$g(x_1, \ldots, x_\ell) := \sum_{1\leq i<j\leq \ell} x_i x_j = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \ldots x_\ell)^2 - \frac{1}{2}\sum x_i^2,$$

g достига максимума си тогава и само тогава, когато $x_i = 1/\ell$ и значи

$$f(\mathbf{x}) \leq \frac{\ell}{2(\ell-1)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell-1}{\ell} = \frac{1}{4}.$$

Следователно, максимумът на f е най-много $1/4$, от където, при $x_i = 1/n$, заключаваме

$$f\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum w(e) \leq \frac{1}{4},$$

което трябваше да докажем.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за въвеждане на f; 2 т. за разглеждане на S и доказателство, че максимум се достига върху клика; 2т. за $f \leq 1/4$ и 1 т. за довършване.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.3 – Ивайло Кортезов; 8.2, 8.4 – Мирослав Маринов; 9.1,10.3 – Константин Делчев; 9.2, 12.1, 12.2 – Веселин Гушев; 9.3, 12.4 – Данила Черкашин; 9.4, 10.1, 11.4 – Милен Иванов; 10.2 – Александър Иванов; 10.4 – Станислав Харизанов; 11.1, 11.2 – Аделина Чопанова; 11.3 – Емил Колев; 12.3 – Кристиян Василев.