Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

---

73. Национална Олимпиада по математика

8 клас: условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1 Точките A, B, C и D лежат на окръжност k в този ред, като $AD \leq BC$. Точката N лежи на лъча $AB^{\rightarrow}$ и е такава, че $\angle ADN = \angle ABC$. Точката P е такава, че A е среда на CP. Ако $\angle ABD = \angle NPC$ и лицето на кръга, ограничен от k, е 2π пъти по-голямо от лицето на триъгълника ABD, то да се намери мярката на $\angle NPC$.

Отговор. 15° или 75°

Решение. От $\angle APN = \angle ABD = \angle ACD$ следва, че NP и CD са успоредни и значи AB и CD не са успоредни. Сега от $AD \leq BC$ следва, че пресечната точка X на правите AB и CD е такава, че A е между X и B. Имаме $\angle ADX = \angle ABC = \angle ADN$, както и $AN = AX$ (понеже триъгълниците APN и ACX са еднакви по втори признак). Така DA се явява ъглополовяща и медиана в триъгълника DNX и в частност следва $\angle DAB = 90^\circ$. Сега ако AH е височината през A в триъгълника ABD, то $\pi\frac{BD^2}{4} = 2\pi\frac{BD \cdot AH}{2}$ и значи $BD = 4AH$. Последното, както е известно (и следва чрез използването на средата на BD), е еквивалентно на $\angle ABD \in \{15^\circ, 75^\circ\}$. Окончателно $\angle NPC = \angle ABD$ е равен на 15° или на 75°. (И двата случая се реализират, първо чрез построяване на ABD и описаната му окръжност, след това C и накрая еднозначно N и P).

Оценяване. (7 точки) 3 т. за въвеждането на X с правилното местоположение (от които се отнема 1 т. при липса на аргументация, че AB и CD не са успоредни), 1 т. за $\angle ADX = \angle ADN$, 1 т. за $\angle DAB = 90^\circ$, 1 т. за $BD = 4AH$, 1 т. за окончателен отговор (точката не се присъжда, ако присъства само една от възможностите). Не се отнемат точки при липса на обосновка, че двата случая наистина се реализират.

Задача 8.2 В зависимост от простото число p намерете броя на естествените числа n, по-малки от p^3, за които p^3 дели $n^p - 1$.

Отговор. 4 при $p = 2$; p при $p \geq 3$

Решение. При $p = 2$ искаме 8 да дели $n^2 - 1$ и възможните n са 1, 3, 5 и 7. Нека $p \geq 3$. Имаме $p \mid n^p - n$ от малката теорема на Ферма и значи $p \mid n - 1$.

Да запишем $n - 1 = ap^m$ за естествено $m \leq 2$ и цяло неотрицателно a, което е 0 или не се дели на p. Тогава от биномната формула на Нютон получаваме $n^p - 1 = p \cdot ap^m + p \cdot \frac{p-1}{2} \cdot a^2p^{2m} + A$, където A се дели на p^{3m}, а значи и на p^3. Събираемото $p \cdot \frac{p-1}{2} \cdot a^2p^{2m} = \frac{p-1}{2} \cdot a^2p^{2m+1}$ също се дели на p^3. Следователно е необходимо и достатъчно $p \cdot ap^m = ap^{m+1}$ да се дели на p^3, което се случва само при $a = 0$ или $m = 2$. Остава да съобразим, че има точно p числа, ненадминаващи p^3, с остатък 1 при деление на p^2.

Коментар. Същият подход работи и при разкриване на скобите в израза $n^{p-1} + n^{p-2} + \cdots + n + 1 = \frac{n^p-1}{n-1}$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за напълно верен отговор, 1 т. за пълен анализ на $p = 2$, 1 т. за $p \mid n-1$, по 2 т. за необходимостта и достатъчността на $p^2 \mid n-1$.

Задача 8.3 На картички са записани всички числа от вида $2^a.3^b$, където a и b са цели неотрицателни числа и $a + b \leq 2024$ (по едно на картичка). Отначало картичката с числото 1 е с лицето надолу, а всички останали са с лицето нагоре. На един ход се избират картички с числа A, B, C, за които $A^2 = B.C$, и едновременно се обръщат. След известен брой ходове имало само една картичка с лицето надолу и на нея било числото n. Колко са възможните стойности на n?

Отговор. 2051325

Решение. Ще бележим числото $2^a.3^b$ с $a{*}b$; в частност $1 = 0{*}0$. Ако приложим ходовете $(2{*}1; 0{*}0; 4{*}2)$, $(2{*}1; 2{*}2; 2{*}3)$, $(4{*}2; 2{*}3; 0{*}4)$, $(0{*}4; 2{*}2; 4{*}0)$, $(4{*}0; 3{*}0; 2{*}0)$, $(3{*}0; 2{*}0; 1{*}0)$, то единствената карта с лицето надолу ще е $1{*}0$. По симетричен начин можем да постигнем и ситуацията, при която единствената карта с лицето надолу ще е $0{*}1$. С помощта на редица от аналогични поредици, при които навсякъде степента на 2 и/или 3 е увеличена с 0, 1 или 2, можем да постигнем и ситуацията, при която единствената карта с лицето надолу ще е $r * s$ за произволни $r, s \in \{0; 1; 2\}$. Сега ако $a * b$ е произволно число от споменатите в условието и $a = 3k + r$, $b = 3m + s$, където k, m са цели и $r, s \in \{0; 1; 2\}$, то, започвайки от ситуацията, при която единствената карта с лицето надолу е $r * s$, с ходовете $(r * s; (k + r) * (m + s); (2k + r) * (2m + s))$, $((k+r)*(m+s); (2k+r)*(2m+s); (3k+r)*(3m+s))$, постигаме ситуацията, при която единствената карта с лицето надолу е $a{*}b$, като при това сме използвали ходове само със съществуващи карти. Така всяка от картите може да е в описаната ситуация, а общият брой карти е $2025 + 2024 + \cdots + 1 = \frac{2025.2026}{2} = 2051325$.

Оценяване. (7 точки) 4 т. за показване как можем да „преместим обърнатата карта с едно поле надясно (или нагоре)“; 1 т. за доказване, че може единствената карта с лицето надолу да е $r * s$ за произволни $r, s \in \{0; 1; 2\}$; 1 т. за показване как можем да „преместим“ обърнатата карта в поле със същите остатъци при деление с 3; 1 т. за завършване.

Задачите са предложени както следва: 8.1, 8.2 – Мирослав Маринов, 8.3 – Ивайло Кортезов.