Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

---

73. Национална Олимпиада по математика

Условия, кратки решения и критерии за оценяване, втори ден

Задача 4. Съществуват ли 2024 ненулеви реални числа a_1, a_2, ..., a_{2024}, за които

$$\sum_{i=1}^{2024}\left(a_i^2+\frac{1}{a_i^2}\right)+2\sum_{i=1}^{2024}\frac{a_i}{a_{i+1}}+2024=2\sum_{i=1}^{2024}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)?$$

(Във втората сума $a_{2025}=a_1$).

Решение. Да допуснем, че такива числа съществуват. Поради цикличност, условието е еквивалентно на

$$\sum_{i=1}^{2024}\left(a_i^2-2a_i+\frac{1}{a_i^2}-2\cdot\frac{1}{a_i}+2\cdot\frac{a_i}{a_{i+1}}+1\right)=0 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{2024}\left(a_i^2-2a_i+\frac{1}{a_{i+1}^2}-2\cdot\frac{1}{a_{i+1}}+2\cdot\frac{a_i}{a_{i+1}}+1\right)=0 \quad\Longleftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{2024}\left(a_i+\frac{1}{a_{i+1}}-1\right)^2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad a_i+\frac{1}{a_{i+1}}=1,\ \forall i=1,2,\ldots,2024.$$

Следователно $a_i+\frac{1}{a_{i+1}}=1$ за всяко $i=1,2,\ldots,2024$. В частност $a_i\neq 1$. Получаваме, че:

- ако $a_i>1$ за някое i, то $a_{i+1}<0$;
- ако $a_i<0$ за някое i, то $a_{i+1}\in(0,1)$;
- ако $a_i\in(0,1)$ за някое i, то $a_{i+1}>1$.

Сега тъй като 2024 не се дели на 3, лесно получаваме противоречие. Така числа с исканото свойство не съществуват.

Оценяване. (7 точки) 2т. за $a_i+\frac{1}{a_{i+1}}=1$; по 1т. за разглеждането на всеки един от случаите $a_i\to a_{i+1}$; 1т. за $3\nmid 2024$; 1т. за довършване.

Задача 5. Дадена е фамилия $\mathcal{F}$ от 4-елементни подмножества (*четворки*) на дадено множество с 5^m елемента, където m е фиксирано естествено число. Известно е, че сечението на никои две четворки от $\mathcal{F}$ не се състои от точно два елемента. Да се намери максималната възможна стойност за броя на четворките $|\mathcal{F}|$ в $\mathcal{F}$.

Решение. За краткост, нека означим с $n=5^m$, а множеството с 5^m елемента – с A_n. Ще докажем, че отговорът е $\frac{n(n-1)}{4}$. Пример за такава конструкция се състои от всички 4-елементни подможества, съответстващи на права в афинното m-мерно пространство над крайното поле $\mathbb{F}_5=\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (примерът може лесно да се конструира и експлицитно, посредством индукция). Наистина, броят точки в $\mathbb{F}_5^m$ е именно $n=5^m$, всяка права минава през точно 5 от тези точки, а всяка двойка точки се съдържа в точно една права и следователно общия брой прави е

$$\frac{\binom{n}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{n(n-1)}{20}.$$

Тъй като на всяка права съответстват точно $\binom{5}{4} = 5$ 4-елементни подмножества, то генерирахме $\frac{n(n-1)}{4}$ множества с исканото свойство.
Остава да покажем, че това е максималната мощност за $|\mathcal{F}|$. Без ограничение на общността, нека си мислим, че $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. За всяка двойка $1 \leq i < j \leq n$, да означим с d_{ij} броят на елементите на $\mathcal{F}$, съдържащи едновременно и i и j. Ако $d_{ij} \leq 3$, то броейки по два начина двойките елементи на A_n участващи в елемент на $\mathcal{F}$, получаваме отново $n(n-1)/4$ за горна граница. По-детайлно, всеки елемент на $\mathcal{F}$ съдържа $\binom{4}{2} = 6$ различни двойки елементи на A_n, а всяка двойка се среща най-много 3 пъти, т.е.,

$$6 \cdot |\mathcal{F}| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} d_{ij} \leq 3\binom{n}{2} \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{F}| \leq \frac{n(n-1)}{4}.$$

Нека сега, боо. $d_{12} = k > 3$. Съгласно свойството на $\mathcal{F}$ всеки два различни негови елемента, съдържащи $\{1, 2\}$ се пресичат в точно 3 елемента на A_n. Тъй като $k > \binom{3}{2} = 3$, те трябва задължително да съдъжат и трети общ елемент, да кажем 3, и могат да бъдат описани по следния начин:

$$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \ldots, \{1, 2, 3, k+3\}.$$

Но от $k \geq 4$, свойството в условието води до $d_{1i} = d_{2i} = d_{3i} = 1$ за $i \in \{4, 5, \ldots, k+3\}$, както и $d_{13} = d_{23} = k$. Следователно

$$d_{12} + d_{13} + d_{23} + \sum_{i=4}^{k+3} (d_{1i} + d_{2i} + d_{3i}) = 6k.$$

Броят на различните двойки (i, j), участващи в горния израз посредством d_{ij} е $3 + 3k$, и значи усреднената стойност за d_{ij} в тази група е под 2, което отново е по-малко от 3. За да завършим доказателството, остава единствено да отбележим, че никои две подмножества $\{d_{ij}\}$ от горния тип нямат общ елемент.

Оценяване. (7 точки) 1т. за отговор; по 3т. за пример и оценка.

Задача 6. Окръжността ω с център I се допира до страните AB и AC на $\triangle ABC$ и пресича страната му BC в точките X и Y. Нека Z е пресечната точка на правата през A, успоредна на BC, и правата през I, перпендикулярна на BC. Да се докаже, че окръжностите, описани около $\triangle ABC$ и $\triangle XYZ$, се допират.

Решение. Ако $AB = AC$, твърдението е очевидно. По-нататък ще считаме, че $AB < AC$, както и че точките B, X, Y, C лежат в този ред върху страната BC. Нека ω се допира до AC и AB в P и Q съответно, $BC \cap PQ = S$ и T е точката на Микел за правите AB, BC, CA и PQ (пресечната точка на описаните окръжности около $\triangle ABC$, $\triangle APQ$, $\triangle BQS$ и $\triangle CPS$). Ще докажем, че окръжностите, описани около $\triangle ABC$ и $\triangle XYZ$, се допират в T. Точките A, T, Q, I, P и Z лежат на окръжността с диаметър AI. Имаме

$$\sphericalangle STQ + \sphericalangle QTZ = \sphericalangle QBC + \sphericalangle QAZ = 180^\circ,$$

откъдето S, T и Z лежат на една права. Следователно $ST \cdot SZ = SP \cdot SQ = SX \cdot SY$ и X, Y, Z и T лежат на една окръжност.
Освен това

$$\sphericalangle BTX = 180^\circ - \sphericalangle XTZ - \sphericalangle BTS = \sphericalangle XYZ - \sphericalangle BQS = \sphericalangle XYZ - \sphericalangle AQP.$$

По същия начин

$$\begin{aligned}\sphericalangle CTY = \sphericalangle YTZ - \sphericalangle CTZ &= \sphericalangle YXZ - (180^\circ - \sphericalangle STC)\\ &= \sphericalangle YXZ - (180^\circ - \sphericalangle SPC) = \sphericalangle YXZ - \sphericalangle SPA.\end{aligned}$$

Тъй като $AP = AQ$ и $ZX = ZY$, получаваме $\sphericalangle BTX = \sphericalangle CTY$. Сега лесно се вижда, че двете окръжности се допират.

Оценяване. (7 точки) 1т. за въвеждане на T и хипотеза, че това е допирната точка, 2т. за $XYZT$ вписан, 4т. за доказване на допирането. Всякакви незавършени изчислителни методи освен такива, които явно доказват някоя от по-горе упоменатите точки, се оценяват с 0 точки!

Задачите са предложени от:
зад. 4 – Борислав Кирилов, зад. 5 – Данила Черкашин, зад. 6 – Борислав Кирилов и Диян Димитров