Министерство на образованието и науката

73. Национална олимпиада по математика

Национален кръг, 13. април 2024 г.

ТЕМА ЗА 7. КЛАС — РЕШЕНИЯ

Задача 1. В редица са записани в нарастващ ред сто последователни естествени числа. Сборът на първите пет числа е k пъти по-малък от сбора на последните пет числа в редицата, като k е естествено число. Намерете:

а) всички възможни стойности на k;

б) най-малкия възможен сбор на всички числа в редицата.

в) най-голямото просто число, което може да е член на дадената редица.

Решение. а) *Отговор*: 2, 6 и 20.

Нека първото число в редицата е n. Сборът на първите пет числа е

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10,$$

а сборът на последните пет числа е

$$(n + 95) + (n + 96) + (n + 97) + (n + 98) + (n + 99) = 5n + 485.$$

От условието следва, че

$$k(5n + 10) = 5n + 485 \iff k(n + 2) = n + 97 \iff (k - 1)n = 97 - 2k.$$

Следователно $k-1 \neq 0$ и $k-1$ е делител на $97-2k = 95-2(k-1)$. Това означава, че $k - 1$ дели 95 и имаме следните възможности:

1. случай. $k - 1 = 1 \iff k = 2$ и $n = 93$;

2. случай. $k - 1 = 5 \iff k = 6$ и $n = 17$;

3. случай. $k - 1 = 19 \iff k = 20$ и $n = 3$;

4. случай. $k - 1 = 95 \iff k = 96$ и $n = -1$, което не е естествено число.

Така търсените стойности са 2, 6 и 20.

Забележка. До решението може да се стигне, като от равенството $k(n + 2) = n + 97$ се заключи, че $n + 2$ дели 95; тъй като $n + 2 > 2$, то $n + 2$ е 5, 19 или 95, а k съответно е 20, 6 или 2.

б) *Отговор*: 5250.

Най-малък сбор се получава при най-малката възможна стойност на n, т.е. при $n = 3$. Тогава сборът е $3 + 4 + \cdots + 102 = 50(3 + 102) = 5250$.

в) *Отговор*: 191.

При $k = 2$ последните две числа на редицата са 191 и 192, т.е. в тази редица 191 е най-голямото просто число.

При $k = 6$ последното число на съответната редица е 116, а при $k = 20$ е 102, т.е. в тези редици няма по-голямо от 191 просто число.

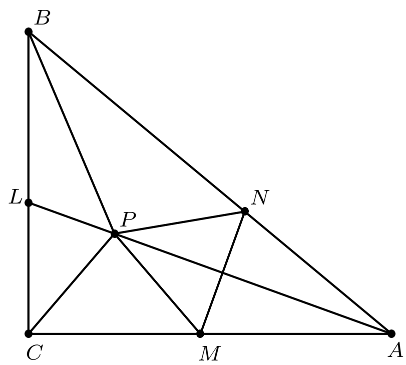
Оценяване. а) 5 точки; б) 1 точка; в) 1 точка.

Задача 2. В правоъгълния триъгълник ABC е построена ъглополовящата AL ($L \in BC$). Точка M лежи на катета AC, а симетралата на отсечката CM пресича AL в точка P. През M е построена права m, перпендикулярна на AL, която пресича хипотенузата AB в точка N, като $\sphericalangle CPN = 144°$.

а) Намерете $\sphericalangle ABC$.

б) Ако правата BP пресича страната AC в точка Q и $QL = BL$, намерете $\sphericalangle CBQ$ и докажете, че $S_{ABQ} = \dfrac{AB \cdot AP}{4}$.

Решение. Първо да отбележим, че $P \in s_{CM} \Longrightarrow PM = PC$.



Триъгълникът AMN е равнобедрен, тъй като ъглополовящата на $\sphericalangle MAN$ е перпендикулярна на MN. Следователно AL е симетрала на отсечката MN. От $P \in AL$ следва, че $PN = PM$.
Така получихме, че

$$PN = PM = PC.$$

Да означим $\sphericalangle MPN = x$ и $\sphericalangle MPC = y$. По условие $\sphericalangle CPN = 144°$, т.е. $x + y = 144°$.

От равнобедрените триъгълници MPN и MPC получаваме, че $\sphericalangle NMP = 90° - \dfrac{1}{2}x$ и $\sphericalangle CMP = 90° - \dfrac{1}{2}y$. Тогава

$$\sphericalangle CMN = \sphericalangle NMP + \sphericalangle CMP = 180° - \frac{1}{2}(x + y) = 180° - \frac{144°}{2} = 108°,$$

а съседният му ъгъл е $\sphericalangle AMN = 72°$. В равнобедрения триъгълник AMN намираме

$$\sphericalangle MAN = 180° - 2 \cdot 72° = 36°,$$

т.е. в правоъгълния $\triangle ABC$ имаме $\sphericalangle ABC = 90° - 36° = 54°$.

Втори начин. След като сме доказали, че $PN = PM = PC$, да построим височината PD към основата в равнобедрения $\triangle PCM$. Да означим $\sphericalangle CPD = \sphericalangle MPD = x$ и $\sphericalangle MPA = \sphericalangle NPA = y$. От

$$\sphericalangle CPN = 2x + 2y = 144^\circ \Rightarrow \sphericalangle DPA = x + y = 72^\circ.$$

От $\triangle PDA$ намираме

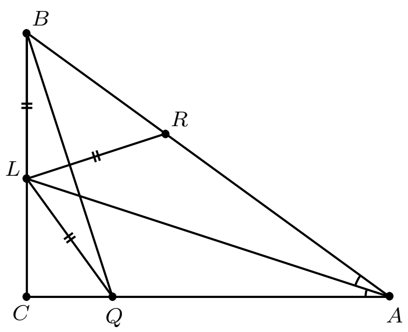
$$\sphericalangle PAD = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAC = 36^\circ,\ \sphericalangle ABC = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ.$$

б) Първо ще намерим $\sphericalangle CBQ$.

Първи начин. Върху страната AB избираме точка R така, че $AQ = AR$. Триъгълниците ALQ и ALR са еднакви по първи признак ($AQ = AR$, AL е обща, $\sphericalangle LAQ = \sphericalangle LAR = 18^\circ$), следователно

$$LR = LQ = LB.$$

В равнобедрения триъгълник LRB имаме $\sphericalangle LRB = \sphericalangle LBR = 54^\circ$. От равенството на съответните външни ъгли в еднаквите триъгълници ALQ и ALR получаваме, че $\sphericalangle CQL = 54^\circ$.
В правоъгълния триъгълник CQL намираме $\sphericalangle CLQ = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$.



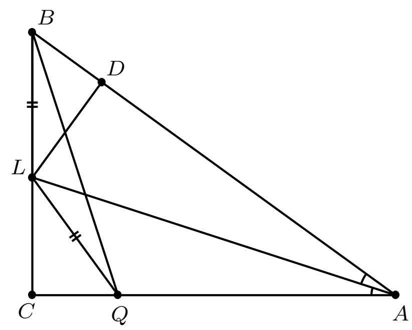
Тъй като $\sphericalangle CLQ$ е външен на ъгъла срещу основата в равнобедрения триъгълник LQB, намираме $\sphericalangle LBQ = \sphericalangle LQB = \dfrac{36^\circ}{2} = 18^\circ$.

Втори начин. Построяваме $LD \perp AB$.

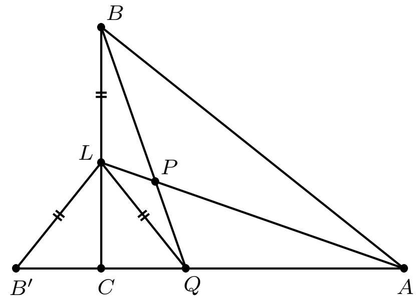
Тъй като $L \in l_{\sphericalangle BAC}$, то $LD = LC$ и получаваме, че триъгълниците CLQ и BLD са еднакви по четвърти признак, откъдето $\sphericalangle CLQ = \sphericalangle BLD$. Но

$$\sphericalangle BLD = 90^\circ - \sphericalangle LBD = 36^\circ,$$

следователно $\sphericalangle CLQ = 36^\circ$, откъдето решението продължава както при първия начин.



Трети начин. На правата AC да отбележим точка B', $AB' = AB$. Триъгълниците ABL и $AB'L$ са еднакви по първи признак, следователно $\sphericalangle AB'L = \sphericalangle ABL = 54^\circ$ и $B'L = BL = QL$. Последното означава, че $\triangle B'QL$ е равнобедрен и $\sphericalangle B'QL = \sphericalangle AB'L = 54^\circ$. Тогава в правоъгълния $\triangle CQL$ намираме $\sphericalangle CLQ = 36^\circ$, откъдето решението продължава както при първия начин.



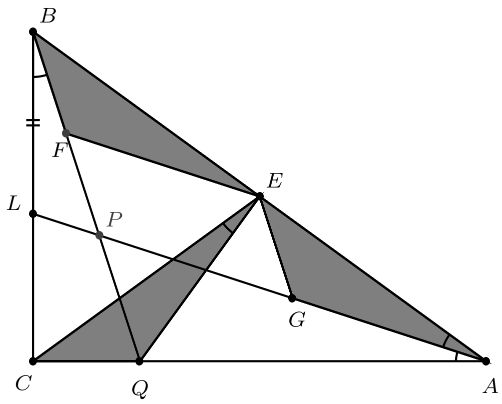
Остава да докажем, че $S_{ABQ} = \dfrac{AB \cdot AP}{4}$.

Първи начин. Първо да отбележим, че

$$\sphericalangle QBA = \sphericalangle CBA - \sphericalangle LBQ = 54^\circ - 18^\circ = 36^\circ = \sphericalangle QAB,$$

т.е. триъгълникът ABQ е равнобедрен, като $AQ = BQ$. Нека $QE = h$ е височината към основата AB в този триъгълник; E е среда на AB. Тогава CE е медиана към хипотенузата в $\triangle ABC$, следователно $CE = EA = EB$ и $\sphericalangle ACE = \sphericalangle CAE = 36^\circ$, а $\sphericalangle CEA = 80^\circ - 2.36^\circ = 108^\circ$. Намираме

$$\sphericalangle CEQ = \sphericalangle CEA - \sphericalangle QEA = 108^\circ - 90^\circ = 18^\circ.$$



Да построим $EF || AP$, $F \in BQ$, и $EG || BQ$, $G \in AP$. Да отбележим равенствата на съответните ъгли $\sphericalangle GAE = \sphericalangle FEB = 18^\circ$ и $\sphericalangle GEA = \sphericalangle FBE = 36^\circ$.

Триъгълниците CQE, EGA и BFE са еднакви по втори признак ($CE = EA = EB$, $\sphericalangle CEQ = \sphericalangle GAE = \sphericalangle FEB = 18^\circ$, $\sphericalangle QCE = \sphericalangle GEA = \sphericalangle FBE = 36^\circ$). Следователно

$$FE = GA = QE = h.$$

Остава да забележим, че $PGEF$ е успоредник и следователно $PG = EF = h$. Тогава $AP = PG + GA = 2h$ и получаваме

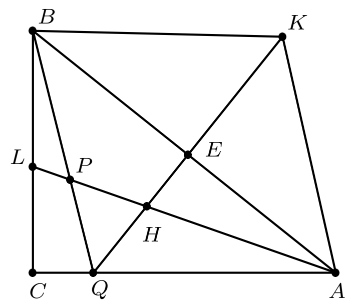
$$S_{ABQ} = \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2}AB \cdot \frac{AP}{2} = \frac{AB \cdot AP}{4}.$$

Втори начин. Да удвоим височината QE в $\triangle ABQ$, т.е. отбелязваме точка $K \in QE$, $QE = EK$. Тогава четириъгълникът $QBKA$ има взаимно разполовяващи се и перпендикулярни диагонали, следователно е ромб. От тук $\sphericalangle QAE = \sphericalangle KAE = 36°$. От $\triangle QBE$ намираме $\sphericalangle BQK = 54°$ и тъй като $BQ || AK$, то и $\sphericalangle QKA = 54°$.

Ако $H = QK \cap AP$, от $\sphericalangle HAK = 18° + 36° = 54°$ следва, че $\triangle HAK$ е равнобедрен и $KH = AH$.

От $\sphericalangle QPH = \sphericalangle PAK = 54°$ (кръстни) следва, че и $\triangle PHQ$ е равнобедрен и $PH = QH$. Тогава

$$AP = AH + HP = KH + HQ = 2QE.$$



Нататък решението продължава както при първия начин.

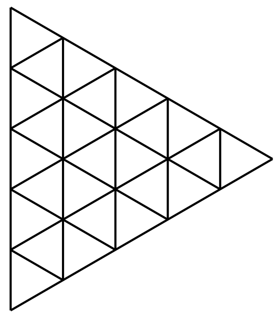
Оценяване.

а) намиране на $\sphericalangle ABC = 54°$ – 3 точки;

б) намиране на $\sphericalangle CBQ = 18°$ – 2 точки;

доказателство, че $S_{ABQ} = \dfrac{AB \cdot AP}{4}$ – 2 точки.

Задача 3. От k^2 еднакви равностранни триъгълничета е съставен равностранният триъгълник Δ_k, където $k > 1$ е естествено число. На чертежа е показан триъгълникът Δ_5.



В началото на една игра във всяко от тези триъгълничета е записана нула. За един ход е позволено да се изберат две триъгълничета с обща страна и числата в тях или да се намалят с 1, или да се увеличат с 1.

След известен брой ходове се оказало, че в триъгълничетата (в някакъв ред) са записани k^2 последователни естествени числа $n, n+1, \ldots, n+k^2-1$.

а) Да се докаже, че ако k е нечетно число, то n е четно.

б) Да се докаже, че

$$n \leqq \frac{(k-2)(k-1)(k+1)}{4}.$$

Решение. а) При всеки ход сборът на записаните числа се променя с 2, т.е. се запазва четен.

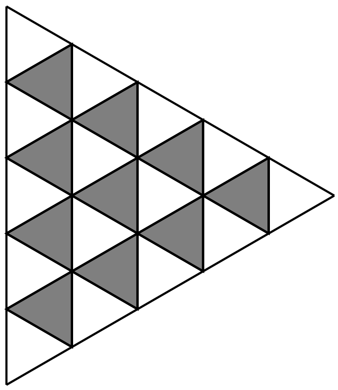
Да разгледаме момента, в който в триъгълничетата са записани k^2 последователни естествени числа $n, n+1, \dots n+k^2-1$.

Сборът на всички записани числа е

$$S = n+(n+1)+\cdots+(n+k^2-1) = k^2n+(1+2+\cdots+k^2-1) = k^2n+\frac{1}{2}(k^2-1)k^2.$$

Тъй като S е четно число, може да запишем, че $\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}k^2n + \frac{1}{4}(k^2-1)k^2$ е естествено число. Ако k е нечетно число, то $k-1$ и $k+1$ са четни числа и $\frac{1}{4}(k^2-1)k^2 = \frac{1}{4}(k-1)(k+1)k^2$ е естествено число. Следователно и събираемото $\frac{1}{2}k^2n$ е естествено число, което при нечетно k означава, че n е четно.

б) Да оцветим шахматно триъгълничетата, като във върховете са бели триъгълничета. Нека сборът на числата в черните триъгълничета е b, а сборът на числата в белите триъгълничета е w.



Тъй като на всеки ход се променят по еднакъв начин числата в едно бяло и едно черно триъгълниче, то разликата $w-b$ се запазва. Тъй като в началото $w=b=0$, то след всеки ход

$$w = b.$$

В момента, в който в триъгълничетата са записани k^2 последователни естествени числа $n, n+1, \dots n+k^2-1$, имаме

$$w = b = \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\left(k^2n + \frac{1}{2}(k^2-1)k^2\right) = \frac{1}{2}k^2n + \frac{1}{4}(k^2-1)k^2.$$

Броят на белите триъгълничета е

$$N_w = 1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Най-малката възможна стойност на сбора на числата в белите триъгълничета е

$$\begin{aligned} w &\geqq n+(n+1)+\cdots+(n+N_w-1)= \\ &= N_w\cdot n+(1+2+\cdots+(N_w-1))= \\ &= N_w\cdot n+\frac{1}{2}(N_w-1)N_w= \\ &= \frac{N_w}{2}(2n+N_w-1)= \\ &= \frac{k(k+1)}{4}\left(2n+\frac{k(k+1)}{2}-1\right)= \\ &= \frac{k(k+1)}{2}n+\frac{k(k+1)(k^2+k-2)}{8}. \end{aligned}$$

Следователно

$$\frac{1}{2}k^2n+\frac{1}{4}(k^2-1)k^2\geqq\frac{k(k+1)}{2}n+\frac{k(k+1)(k^2+k-2)}{8}.$$

Като разделим двете страни на неравенството на k и приведем към общ знаменател, получаваме

$$4kn+2(k-1)(k+1)k\geqq 4(k+1)n+(k+1)(k-1)(k+2),$$

откъдето

$$2(k-1)(k+1)k-(k+1)(k-1)(k+2)\geqq 4n\iff$$

$$4n\leqq(k+1)(k-1)(2k-k-2)=(k+1)(k-1)(k-2),$$

което искахме да докажем.

Оценяване. а) 2 точки.
б) Шахматно оцветяване и намиране на инвариант – 1 точка.
Намиране на броя на триъгълниците от единия цвят – 0.5 точки.
Оценка за сбора на числата в белите триъгълничета – 1.5 точки.
Довършване на задачата – 2 точки.