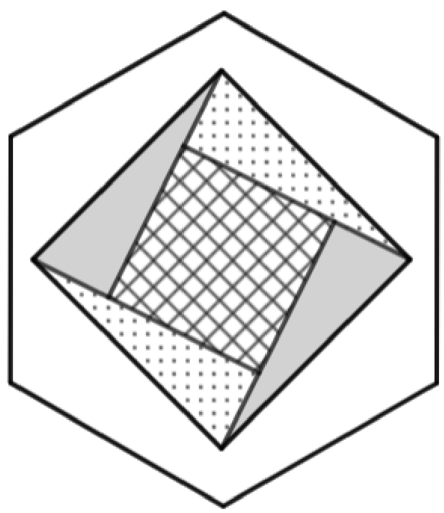
50 ГОДИНИ

КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

ЗА ПРИЕМ В НПМГ „Акад. Любомир Чакалов“

1967 – 2016



София, 2025

В настоящия сборник са дадени в оригиналния им вид конкурсните задачи за прием в НПМГ „Акад. Любомир Чакалов“ от 1967 до 2016 година. Те са плод от работата на много преподаватели от Математическия факултет на СУ „Св. Климент Охридски“ и на учители от НПМГ.

До 1982-ра година са приемани ученици след завършен осми клас, а след това – след завършен седми клас. От 1986 до 2006 година са провеждани по два изпита по математика: за всички специалности и за профил математика.

Впоследствие някои конкурсни задачи за НПМГ бяха включени в сборници, а също и в учебници по математика. Има задачи в настоящия сборник, които са „по действителен случай“: световното футболно първенство 1994 година, протест за изсечени дървета в квартал Лозенец, режим на водата в град София, кайма от свинско и телешко месо в ресторант, храна за папагали, голям брой сватби на 07.07.07г. и други.

Въпреки различията в учебните програми през различните години, в доста от задачите могат да се намерят интересни идеи, подходящи за подготовка за изпити и състезания по математика.

Съставител: **Боянка Савова**

1967 г.

Задача 1. Нека x, y и z са нечетни цифри, като сумата на всички трицифрени естествени числа, във всяко от които участва всяка от цифрите x, y и z, е 10 пъти по-голяма от трицифреното естествено число, всичките цифри на което са равни на x. Намерете x, y и z.

Задача 2. Четирима работници с еднаква производителност заедно свършват определена работа за 9 часа. Ако започват работа през равни интервали от време и свършват същата работа, като първият работи 5 пъти повече време от последния, то за колко часа ще свършат цялата работа?

Задача 3. Даден е триъгълникът ABC и са построени точките A_1, A_2, A_3 и M така, че A_1 е симетрична на A относно B, A_2 е симетрична на A_1 относно C, A_3 е симетрична на A_2 относно A, M е среда на AA_3.

Да се докаже, че триъгълникът ABC е еднакъв на триъгълника ABM.

1968 г.

Задача 1. Да се намери четирицифрено число, като се знае, че сумата от квадратите на цифрата на хилядите и цифрата на единиците е 13, а сумата от квадратите на другите две цифри е 85 и че това число е с 909 по-голямо от числото, записано със същите цифри, но в обратен ред.

Задача 2. Да се докаже, че ако x, y, z и a са числа, за които са изпълнени равенствата

$$x + y + z = a$$

и

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a},$$

то поне едно от числата x, y и z е равно на a.

Задача 3. Точките A_1 и B_1 лежат съответно върху страните BC и AC на триъгълника ABC, а отсечките AA_1 и BB_1 се пресичат в точка M, която дели всяка от тези отсечки в отношение $2 : 1$ (като $AM : A_1M = BM : B_1M = 2 : 1$).

Да се докаже, че:

а) отсечката AB е успоредна на отсечката A_1B_1 и е два пъти по-голяма от нея;

б) отсечките AA_1 и BB_1 са медиани в $\triangle ABC$.

1969 г.

Задача 1. Докажете тъждеството

$$2a^4+2b^4+2c^4+(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=(a^2+b^2+c^2)^2.$$

Задача 2. Даден е успоредник и точка P, различна от върховете му. През всеки връх е построена права, успоредна на правата, която съединява точката P със срещуположния му връх. Да се докаже, че така получените четири прави минават през една точка.

Задача 3. Едно множество M от цели положителни числа ще наричаме *мултипликативно*, ако за всеки две не непременно различни числа x и y, които принадлежат на M, произведението $x.y$ също принадлежи на M.

а) Кои от следните множества са мултипликативни и кои не са?

А. Множеството от един единствен елемент – числото 1;

Б. Множеството на нечетните числа;

В. Множеството на четните числа, които са различни от 8.

б) Какво означават думите: „Множеството M не е мултипликативно“?

в) Нека M_1 и M_2 са две мултипликативни множества. Докажете, че множеството M на всички числа, които принадлежат едновременно и на M_1, и на M_2, е мултипликативно.

1970 г.

Задача 1. Трима купувачи А, Б и В купили платове от три вида: А купил 14 m от първия вид, 5 m от втория вид и 9 m от третия вид, като платил общо 160 лв.; Б купил 4 m от първия вид, 13 m от втория вид и 9 m от третия вид, като платил общо 128 лв.; В купил по 5 m плат от всеки вид.

Колко лева е дал купувачът В?

Кой от първите два плата е по-скъп?

Задача 2. Двама велосипедисти Иван и Петър се състезават. Иван изминал първата половина от определеното разстояние със скорост a, а втората половина – със скорост b. Петър се движил през първата половина от времето на пробега със скорост a, а през втората половина – със скорост b.

Кой от двамата е пристигнал пръв на финала, ако са стартирали едновременно?

Задача 3. Нека AM и BP са медиана и ъглополовяща на триъгълника ABC, всяка от които разполовява периметъра на $\triangle ABC$, т.е.

$$AB + BM = AC + CM \quad \text{и} \quad BA + AP = BC + CP.$$

Да се докаже, че $\triangle ABC$ е равностранен.

1971 г.

Задача 1. Нека a, b и c са числа, за които $a+b\neq 0$, $b+c\neq 0$ и $c+a\neq 0$. Докажете, че ако

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1,$$

то

$$a^3+b^3+c^3+abc=0$$

и обратно.

Задача 2. Нека M и H са точки съответно върху страните BC и CD на квадрата $ABCD$, като е изпълнено равенството $BM=CH$. Нека P е пресечната точка на AM и BH.

а) Докажете, че $\sphericalangle APB$ е прав.

б) Да се определи геометричното място на центровете на окръжностите, минаващи през точките A, D и петата P на перпендикуляра, спуснат от точката B към AM, когато M описва страната BC.

Задача 3. За две цели числа a и b ще пишем $a\equiv b$ точно тогава, когато разликата $a-b$ се дели на 10. Намерете всички двойки цели числа, за които

$$2x+2y\equiv 0 \quad \text{и} \quad 2xy\equiv x.$$

1972 г.

Задача 1. Бащата е на 49 години и не е имал деца преди 20 годишна възраст. Всяка година той и синът му заедно празнуват рождените си дни. Преди колко години бащата е бил 8 пъти по-възрастен от сина си?

Задача 2. Да се докаже, че ако за числата x, y, z са изпълнени едновременно равенствата

$$x + y + z = 3t \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3t^2,$$

то $x = y = z$.

Задача 3. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$ със среди M и H на страните AB и CD.

а) Да се докаже, че средите на диагоналите на четириъгълниците $AMHD$ и $MBCH$ са върхове на успоредник или лежат на една права.

б) Ако е известно, че

$$2 \cdot MH = AD + BC,$$

да се определи вида на $ABCD$.

1973 г.

Задача 1. Да се намери поне една стойност на параметъра a, за която изразът

$$x^3 + y^3 + z^3 - axyz$$

се разлага на множители, единият от които е $x + y + z$.

Задача 2. Даден е тъпоъгълен триъгълник ABC. Да се докаже, че точките, симетрични на ортоцентъра на триъгълника относно правите, съдържащи страните му, лежат на окръжността, описана около триъгълника.

Задача 3. В равнината са дадени права g и $2n$ ($n \geqq 1$) точки, които не лежат на g. Да се докаже, че правата g пресича не повече от n^2 на брой отсечки с краища дадените точки.

1974 г.

Задача 1. Да се намерят трицифрени числа x и y, за които сборът $x+y$ се дели на 492 и частното $\dfrac{x}{y}$ е цяло число, което се дели на 5.

Задача 2. Да се докаже тъждеството

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a}{a^2+b^2}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}+\frac{8a^7}{a^8+b^8}+\frac{16a^{15}}{a^{16}+b^{16}}=\frac{31a^{31}}{a^{32}-b^{32}}.$$

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$ и нека M е центърът на тежестта му (медицентърът). През M е построена права l, която пресича страните AC и BC съответно в точките P и Q. От върховете на триъгълника са спуснати перпендикулярите AA_1, BB_1 и CC_1 към l (A_1, B_1 и C_1 са върху l).

Да се докаже, че:

а) $AA_1+BB_1=CC_1$;

б) $S_{APQ}+S_{BPQ}=S_{PCQ}$.

1975 г.

Задача 1. Да се намерят естествените числа x и y, ако е известно, че произведението им е трицифрено число, което е куб на цяло число, а числото $\dfrac{x}{y}$ е точен квадрат на естествено число.

Задача 2. Да се докаже, че ако x, y и z са произволни числа, за които е изпълнено $x + y + z = 1$, то е в сила неравенството

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq \frac{1}{3}.$$

Задача 3. Окръжностите $k_1(O_1; r)$ и $k_2(O_2; r)$ се допират външно в точка T. През центровете O_1 и O_2 в една и съща полуравнина относно правата O_1O_2 са построени допирателните O_1A_2 и O_2A_1, съответно към k_2 и k_1 (A_1 лежи на k_1 и A_2 лежи на k_2).

Да се докаже, че:

а) четириъгълникът $O_1O_2A_2A_1$ е трапец;

б) ако M е пресечната точка на правите O_1A_2 и O_2A_1, правата MT е вътрешна допирателна за k_1 и k_2;

в) правите O_1A_2 и O_2A_1 са ъглополовящи съответно на $\sphericalangle A_1O_1O_2$ и $\sphericalangle A_2O_2O_1$;

г) пресечната точка N на правите O_1A_1 и O_2A_2 лежи на правата MT;

д) триъгълникът O_1O_2N е равностранен.

1976 г.

Задача 1. Да се намери трицифрено число, за което се знае, че се дели на 45 и сборът на цифрата на стотиците и цифрата на единиците е два пъти по-голям от цифрата на десетиците.

Задача 2. Да се реши системата

$$\left|\; |x-1|+|y-5|=1|x-1|+5=y\right.$$

Задача 3. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с височини AD, BE, CF и ортоцентър H (D лежи на BC, E – на AC, F – на AB).

а) Да се докаже, че H може да разполовява най-много една от височините.

б) Ако $CH = HF$ и $AH : HD = 3 : 1$, да се докаже, че триъгълникът ABC е равнобедрен и $BD : DC = 2 : 1$.

в) Да се построи триъгълник ABC по дадена височина $AD = h$ и ортоцентър H (H е вътрешна за отсечката AD), така че H да е среда на височината през върха C.

1977 г.

Задача 1. Да се намерят онези трицифрени числа, всяко от които да е равно на сумата от всевъзможните двуцифрени числа, образувани от цифрите му.

Задача 2. Нека x, y и z са числа, за които са в сила равенствата

$$x + y + z = 0 \quad \text{и}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Да се докаже, че

$$x^4 + y^4 + z^4 = 8.$$

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$. Върху страните AC и BC външно за триъгълника са построени квадратите $ACPQ$ и $BMNC$. Да се докаже, че правите AN, BP и MQ минават през една точка.

Упътване. Използвайте окръжностите, описани около построените квадрати.

1978 г.

Задача 1. Ако зачеркнем цифрата на стотиците на трицифрено число, ще получим двуцифрено число, което е 7 пъти по-малко от него. Намерете трицифреното число.

Задача 2. Докажете, че ако числата a, b, c, x, y и z са свързани с равенствата

$$\begin{aligned}x^2 - yz = a,\\ y^2 - zx = b,\\ z^2 - xy = c,\end{aligned}$$

то

$$ax + by + cz = (a + b + c)(x + y + z).$$

Задача 3. Около $\triangle ABC$ е описана окръжност и нека A_1, B_1, C_1 са среди съответно на дъгите $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$ ($\overset{\frown}{BC}$ не съдържа точка A, $\overset{\frown}{CA}$ не съдържа точка B, $\overset{\frown}{AB}$ не съдържа точка C). Хордата B_1C_1 пресича AC в точка M и AB в точка N. Хордата A_1C_1 пресича AB в точка P и BC в точка Q. Хордата A_1B_1 пресича BC в точка R и AC в точка S.

а) Докажете, че AA_1, BB_1 и CC_1 минават през една точка O.

б) Докажете, че $AA_1 \perp B_1C_1$, $BB_1 \perp A_1C_1$ и $CC_1 \perp A_1B_1$.

в) Ако O_1 е пресечната точка на AA_1 и B_1C_1, докажете, че O_1 е среда на отсечката AO.

г) Докажете, че правите MQ, NR и SP минават през точката O и $MQ||AB$, $NR||AC$, $PS||BC$.

1979 г.

Задача 1. Да се намерят три различни помежду си цифри така, че сборът на двете най-големи трицифрени числа, които могат да се запишат с тези цифри, да е равен на 1444.

Задача 2. Дадена е функцията $f(x) = 3x - 1$. Да се решат неравенствата:

а) $f(x+1) + |f(x) + 2 - x| < 3$;

б) $f(2x-4) + f(f(x)) < -2$.

Задача 3. Дадена е окръжност $k(O; R)$ с диаметър AB. Построени са радиусът OC, перпендикулярен на AB, и допирателна t към окръжността в точка B.

През произволна точка M ($M \neq O$, $M \neq C$) от радиуса OC е построена права AM, която пресича k и t съответно в точките N и P. Допирателната t' в точката N към k пресича t в точка Q.

Да се докаже, че:

а) правата OQ е симетрала на BN и $OQ || AM$;

б) четириъгълникът $AOQM$ е успоредник;

в) точката Q е център на окръжността, описана около $\triangle BPN$;

г) около четириъгълника $BNMO$ може да се опише окръжност.

1980 г.

Задача 1. Дадена е системата

$$\left|\begin{array}{l} 9x + 5y = a \\ 7x + 3y = b, \end{array}\right.$$

където a и b са цели числа.

а) Обяснете защо при произволни стойности на a и b системата винаги има едно решение.

б) Определете a и b така, че $x = y$ при $9 < a < 15$ и $9 < b < 15$.

в) При така намерените в б) стойности, решете системата.

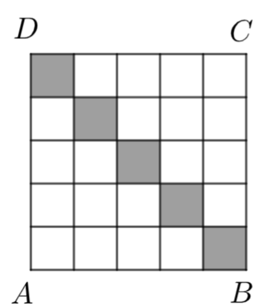
Задача 2. Известно е, че едно четирицифрено число е точен квадрат на цялото положително число a. Ако на това число намалим цифрата на хилядите с 3, а увеличим цифрата на единиците му с 3, полученото четирицифрено число е също точен квадрат на цялото положително число b. Намерете четирицифреното число.

Задача 3. Дадена е квадратната таблица с 25 клетки (квадратчета). Във всяка клетка се записва една от цифрите 1, 2, 3, 4, 5 така, че:

а) във всеки ред и във всеки стълб на таблицата са записани всички цифри 1, 2, 3, 4, 5;

б) във всеки две квадратчета, които са симетрични относно диагонала BD са записани едни и същи цифри.

Докажете, че в квадратчетата по диагонала BD (оцветени на чертежа) са записани всички цифри 1, 2, 3, 4, 5.



Задача 4. Триъгълникът ABC е правоъгълен с прав ъгъл при върха C и катети a и b, хипотенуза c и височина към нея $CD = h$.

а) Докажете, че:

1) $a + b = 2r + 2R$;

2) $\dfrac{a + b - c}{2} = r$,

където r и R са съответно радиусите на вписаната и описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

б) Докажете, че

$$r_1 + r_2 + r = h,$$

където r_1 и r_2 са радиусите на вписаната окръжност съответно в $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$.

1981 г.

Задача 1. Дадени са полиномите

$$P(x) = x^2 - mx + m + 7$$

и

$$Q(x) = x^3 + 4x^2 + nx - 6.$$

а) Да се определят стойностите на параметъра m, така че между реалните корени x_1 и x_2 на уравнението $P(x) = 0$ да е в сила неравенството

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} \geqq 1.$$

б) Да се определят параметрите m и n, така че $x = -3$ да бъде общ корен на уравненията $P(x) = 0$ и $Q(x) = 0$.

в) Да се съкрати дробта $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ при намерените стойности на m и n от б).

г) Ако $f(x)$ е съкратената дроб от условие в), да се докаже, че уравнението $f(x) + a = 0$ не може да има двоен корен за нито една реална стойност на параметъра a.

Задача 2. Да се намери четирицифрено число $\overline{xyzt}$, което е точен куб, ако цифрите му са различни и удовлетворяват равенствата

$$2x = y - z \quad \text{и} \quad y = t^2.$$

Задача 3. Даден е трапец $ABCD$. Нека M и N са среди на AB и CD и $AN \perp DM$, $MC \perp BN$. Да се докаже, че:

а) $AM^2 + DN^2 = AD^2 + MN^2$;

б) $ABCD$ е равнобедрен трапец;

в) Да се изчисли лицето на трапеца $ABCD$, ако е дадено още, че $MN = h$ и $\sphericalangle DMC = 60°$.

1982 г.

Задача 1. Нека числата x и y удовлетворяват равенството

$$||x|-1|-y=0.$$

а) Да се изрази x^2+y^2 като функция на x.

б) Измежду двойките $(x;y)$, които удовлетворяват даденото равенство, да се намерят тези, за които x^2+y^2 е най-малко.

в) Да се даде геометрично тълкуване на резултата от условие б).

Задача 2. В правоъгълен триъгълник дължините на катетите, хипотенузата и височината към хипотенузата са съответно a, b, c и h. Да се докаже, че:

а) има триъгълник с дължини на страните $a+b$, h и $c+h$;

б) триъгълникът от условие а) е правоъгълен.

Задача 3. Даден е правоъгълен триъгълник ABC, за който точката P е среда на хипотенузата AB. Точките M и N се избират съответно на катетите AC и BC, така че $\sphericalangle MPN=90^\circ$.

а) Да се докаже, че $\triangle MPN$ е подобен на дадения.

б) При какво положение на точката M върху катета AC лицето на триъгълника MPN е най-малко?

1983 г.

Изпит за кандидатстване в осми клас

Задача 1. Дадено е уравнението

$$|2x+1|+|2x-3|=a,$$

където a е произволно число. Да се реши уравнението при различните стойности на a.

Задача 2. В окръжност с център O е вписан четириъгълник $ABCD$. Диагоналите на четириъгълника се пресичат в точка P, а M и N са средите съответно на страните AB и CD. Да се докаже, че:

а) $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$;

б) ако $AC\perp BD$, то $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$;

в) ако $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$, то $AC\perp BD$ ($O\neq P$!).

Задача 3. В три съда има спирт с различна концентрация. В първия съд има 60 литра 80-градусов спирт, във втория са 40 литра 30-градусов спирт и в третия – 100 литра 60-градусов спирт. Спиртът от трите съда се смесва и се прибавя известно количество вода, така че да се получи 50-градусов спиртен разтвор. Да се определи количеството на прибавената вода.

Изпит за кандидатстване в девети клас

Задача 1. Нека a и b са различни положителни числа.

а) Изразът

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-4\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$$

да се представи като произведение от равни множители.

б) Изразът $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ да се представи като произведение на два множителя, сумата от които да е равна на $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

Задача 2. Отсечките AA_1 и BB_1 са височини в остроъгълния триъгълник ABC. Лицето на триъгълника A_1B_1C е $\frac{9}{16}$ от лицето на $\triangle ABC$. Да се намери косинусът на ъгъла при върха C.

Задача 3. Дадени са два взаимно перпендикулярни лъча p и q с общо начало O. Точките A и M лежат на лъча p, а точките B и N – върху лъча q, така че $OA = OB = b$ и $OM = ON = a$ $(a > b)$. Правите AN и BM се пресичат в точка P. Да се определи лицето на четириъгълника $OAPB$.

1984 г.

Задача 1. Дадени са функциите

$$f(x) = |1 - x| + |1 + x| \quad \text{и} \quad g(x) = a - |x|,$$

където a е фиксирано число.

а) Да се намери при кое a графиката на функцията $g(x)$ минава през точката с координати $(1; 2)$.

б) При така намереното a да се начертаят графиките на $f(x)$ и $g(x)$ и да се пресметне лицето на фигурата, която те заграждат.

в) Да се намери при кои стойности на a уравнението $f(x) = g(x)$ има единствено решение.

Задача 2. Три смеси са съставени от веществата A, B и C. Първата смес съдържа само A и B, в отношение 3 : 5 съответно. Втората съдържа само B и C в отношение 1 : 2 съответно, а третата съдържа само веществата C и A в отношение 3 : 2 съответно. По колко грама трябва да се вземе от всяка смес, за да се получат 29 грама смес, в която количествата на веществата A, B и C да са в отношение 3 : 5 : 2 съответно?

Задача 3. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = 90^\circ$, от върховете B и D са спуснати перпендикуляри BE и DF към диагонала AC ($E, F \in AC$). Да се докаже, че $CE = FA$.

1985 г.

Задача 1. Да се докаже, че за всяко четно число n, числото

$$N = n^3 + 20n$$

се дели на 48.

Задача 2. От пункт A за пункт B тръгва автобус, а едновременно с него от B за A тръгва лека кола. След известно време се срещат в пункт C. След още толкова време автобусът среща в пункт D колоездач, който е тръгнал от B в момента на срещата на автобуса и леката кола.

Известно е, че колоездачът е пътувал от D до C за 4 пъти по-голямо време, отколкото е било необходимо на автобуса да стигне от D до B.

а) Колко пъти скоростта на автобуса е по-голяма от скоростта на колоездача?

б) Колко пъти скоростта на леката кола е по-голяма от скоростта на колоездача?

Задача 3. В триъгълника KLM ъгълът при върха L е тъп. Височините към страните KL и LM се пресичат в точка H. Известно е, че центърът на описаната около $\triangle KHM$ окръжност лежи на окръжността, описана около $\triangle KLM$.

Да се определи големината на $\sphericalangle KLM$.

1986 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Решете уравнението

$$\frac{9a(ax-1)}{x+3} = 1,$$

където a е параметър.

Задача 2. За $\triangle ABC$ е известно, че $\sphericalangle ACB = 40^\circ$ и $AC = BC$. Постройте окръжност k през върховете B и C, която се допира до правата AB.

Изчислете мерните числа на дъгите, на които се дели окръжността k от точките B, C и D, където D е пресечната точка на окръжността k и бедрото AC.

Задача 3. В един хокеен мач отбор А вкарвал през всяка третина един и същ брой голове, а отбор В вкарвал през всяка следваща третина по един гол повече, отколкото през предишната.

Кой е спечелил мача и с какъв резултат, ако е известно, че през третата третина двата отбора са вкарали еднакъв брой голове, а единият отбор през целия мач е вкарал два пъти повече голове, отколкото другия?

Изпит за профил математика

Задача 1. Дадено е, че

$$A = (1 + x^2)^{-1} + (1 + y^2)^{-1}, \quad B = 2(1 + xy)^{-1}, \quad A = B, \quad x \neq y.$$

Пресметнете A.

Задача 2. В остроъгълния $\triangle ABC$ са построени височините AA_1, BB_1, CC_1 (A_1, B_1, C_1 лежат съответно на BC, CA, AB) и

$$\measuredangle C_1CB = \measuredangle B_1BA = \measuredangle A_1AC.$$

а) Да се докаже, че $\triangle ABC$ е равностранен.

б) Точка M е от отсечката AB. При какво положение на точката M разстоянието между ортогоналните ѝ проекции върху правите AA_1 и BC е най-малко?

Задача 3. От пункт A за пункт B тръгнал велосипедист. Едновременно с него от пункт B за пункт A тръгнали втори и трети велосипедисти.

След един час вторият велосипедист се намирал между първия и третия на равни разстояния от тях.

След още половин час първият велосипедист се намирал между другите двама на равни разстояния от тях.

След колко време от началото на движението третият велосипедист ще се намира между другите двама на равни разстояния от тях?

1987 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Двама мотористи тръгват от едно място по колодрум, дълъг 900 m, в една и съща посока с постоянни скорости. Вторият моторист тръгва 6 секунди по-късно от първия, като 24 секунди след тръгването на първия, вторият го настига за първи път, а след още 3 минути и 20 секунди го настига за втори път.

Да се намерят скоростите на мотористите.

Задача 2. Дадено е уравнението

$$\frac{1}{x+a-1} - \frac{2a}{x^2-a^2+2a-1} = \frac{5}{x-a+1},$$

където a е параметър.

а) Да се реши уравнението.

б) Да се определят стойностите на параметъра a, за които корените на уравнението са по-малки от 2.

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$ с $\sphericalangle BCA = 60^\circ$. Нека AM и BN са ъглополовящите на $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle CBA$ ($M \in BC$, $N \in AC$) и нека точка O е пресечната им точка.

а) Да се докаже, че около четириъгълника $CMON$ може да се опише окръжност.

б) Да се докаже, че $OM = ON$.

Изпит за профил математика

Задача 1. Ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ на $\triangle ABC$ пресича страната BC в точка M. Центърът O на описаната около $\triangle ABC$ окръжност съвпада с центъра на вписаната в $\triangle ABM$ окръжност.

а) Докажете, че $\triangle ABM$ е равнобедрен.

б) Пресметнете ъглите на $\triangle ABC$.

Задача 2. В $\triangle ABC$ ($\sphericalangle BCA = 90°$) дължините на страните са $AB = c$, $BC = b$, $CA = b$. Дължината на радиуса на вписаната окръжност е r. Докажете, че:

а) $r = \dfrac{a+b-c}{2}$;

б) $S = \dfrac{a+b+c}{2} \cdot r$, където $S = S_{\triangle ABC}$;

в) $c^2 = a^2 + b^2$;

г) ако a, b и c са цели числа, то поне едно от тях дели на 3.

Задача 3. Учениците от едно училище са строени в правоъгълен блок по 24 човека във всяка редица, а учениците от друго училище са строени по 36 човека във всяка редица, като броят на редиците във второто училище е с 25 по-малък от броя на редиците в първото.

Учениците в първото училище са повече от учениците във второто училище.

а) Покажете, че броят на редиците в първото училище е по-малък от 75.

б) Колко са учениците от първото училище. ако е известно, че техният брой е точен квадрат на цяло число?

1988 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Даден е многочленът

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1.$$

а) Да се разложи $f(x)$ на множители.

б) Да се намерят стойностите на x, за които $f(x) = 0$.

в) Да се намери стойността на $f(x)$, като x се замести с най-голямото цяло отрицателно решение на неравенството

$$(x+4)^2 - (x-2)^2 - \frac{14x+3}{2} > 2x.$$

Задача 2. Пощальон занесъл телеграма на разстояние 2000 m и се върнал в пощата след 45 минути. С каква средна скорост (в km/h) се е движил, ако за предаването на телеграмата са му били нужни 5 минути?

С каква средна скорост трябва да се движи пощальонът, за да отнесе телеграма на разстояние 2100 m и да се върне най-много за 41 минути, ако за предаването на телеграмата са му нужни 6 минути?

Задача 3. Даден е правоъгълен трапец $ABCD$, в който $AB||CD$, $AB > CD$, $AD \perp AB$. Ъглополовящата на ъгъла при върха B минава през средата O на бедрото AD. През точката O е построена права перпендикулярна на BC, която пресича във вътрешна точка M отсечката BC.

Да се докаже, че:

а) $OM = OD$;

б) правата OC е симетрала на отсечката DM;

в) $BC = AB + DC$;

г) $\sphericalangle COB = 90°$;

д) $\triangle AMD$ е правоъгълен;

е) ако $DC = \dfrac{2}{5}AB$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}$, да се изразят чрез $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$.

Изпит за профил математика

Задача 1. Върху страните AC и BC на остроъгълния триъгълник ABC външно за него са построени квадратите $ACSL$ и $BCPK$. През точката S е построена права, успоредна на CP, а през P – права, успоредна на CS. Двете прави се пресичат в точка Q.

Да се докаже, че:

а) $AP = BS$;

б) $AP \perp BS$;

в) $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CPQ$;

г) $\triangle BCA \cong \triangle CPQ$;

д) $CQ \perp AB$;

е) медианата през върха C на $\triangle ABC$ е равна на половината от страната PC на $\triangle CPS$.

Задача 2. От пристанище A по течението на една река потеглил параход със скорост в спокойна вода 12 km/h. Едновременно с него от пристанище B срещу течението на реката се отправила моторна лодка със скорост в спокойна вода 300 m/min. Скоростта на течението е 2 m/s.

Лодката и параходът се срещнали в пункт C, който се намира на разстояние 16 km от A, в 16 h 45 min.

Намерете в колко часа и на какво разстояние от B ще се срещнат, ако скоростта на течението е 3 m/s.

Задача 3. а) Да се разложи на множители

$$x^3 + 10x^2 + 19x - 30.$$

б) Да се докаже, че изразът

$$B = a^4 - \frac{2a^4 - 8}{a^2 + 2}$$

е положителен за всяко a и да се намери най-малката стойност на B и за коя стойност на a се получава тази най-малка стойност.

1989 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Дадено е уравнението

$$(ax-6)\cdot 6+24=5ax,$$

където a е цяло число, а x е неизвестно. Да се намери за кои стойности на a уравнението:

а) има за корен числото $-1{,}5$;

б) няма решение;

в) има за корен отрицателно число;

г) има за корен цяло число;

д) има за корен естествено число.

Задача 2. Два цеха изработват машини: първият – по 21 машини на ден, а вторият – по 54 машини на ден.

За колко дни заедно биха изпълнили поръчка от 4200 машини и какъв процент от работата извършва вторият цех?

Ако първият цех изпълнява отделна поръчка, най-много от колко машини може да се състои поръчката, ако се знае, че времето, необходимо за изпълнението ѝ, не трябва да превишава времето, за което вторият цех изпълнява поръчка, която е със 100 машини по-голяма от първата?

Задача 3. Градусните мерки на $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ на $\triangle ABC$ се отнасят както $2:3:4$ съответно.

1) Да се изчислят мерките на ъглите $\triangle ABC$.

2) Построени са точки K и L така, че $\overrightarrow{BK}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$ и $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Ако лицето на $\triangle ABK$ е равно на 12 cm^2, да се изчисли лицето на четириъгълника $ABLC$.

3) Ако M е произволна точка от страната AC, а P е произволна точка от страната BC, да се докаже, че $AB > MP$.

Изпит за профил математика

Задача 1. Дадена е функцията

$$f(x) = (a+2)x - a + 2,$$

където a е параметър.

а) Да се реши уравнението $f(x) = 0$.

б) Да се намери най-голямото цяло отрицателно решение на неравенството $f(x) \leqq 5$ при $a = 1$.

в) Да се определи онази стойност на параметъра a, при която графиката на функцията

$$y = f(x) + f(x-1)$$

минава през точка $M(1;2)$.

Задача 2. Броят на двустайните апартаменти в един жилищен блок е 4 пъти по-голям от броя на едностайните, а броят на тристайните апартаменти е число, което се дели на броя на едностайните.

Ако броят на тристайните апартаменти се увеличи 5 пъти, то те ще бъдат с 22 повече от двустайните.

Колко апартамента има в блока, ако е известно, че те са не по-малко от 100 и са само едностайни, двустайни и тристайни?

Задача 3. Даден е успоредник $ABCD$. Построени са точки M, N, P, Q така, че

$$\overrightarrow{MA} = \frac{1}{n}\,\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{NB} = \frac{1}{n}\,\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{PC} = \frac{1}{n}\,\overrightarrow{CD},\quad \overrightarrow{QD} = \frac{1}{n}\,\overrightarrow{DA},$$

където n е произволно естествено число.

а) Да се определи видът на четириъгълника $MNPQ$.

б) Ако точките K и T са такива, че

$$\overrightarrow{PK} = \frac{1}{n-1}\,\overrightarrow{PN} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{PT} = \frac{1}{n}\,\overrightarrow{PM},$$

да се докаже, че точките Q, T и K лежат на една права.

1990 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Една мотриса изминава разстоянието между гарите А и В със скорост 30 km/h. Веднъж, след като изминала половината от пътя между двете гари, поради повреда, направили престой 30 минути. Машинистът пресметнал, че за да пристигне навреме в гара В, трябва да увеличи скоростта с 10 km/h. Намерете разстоянието между двете гари.

Задача 2. Дадени са функциите

$$f(x) = \frac{x-2}{12} - \frac{1+2x}{3} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{1-2x}{6} - \frac{3x-2a}{2},$$

където параметърът a е такова число, че графиката на функцията $g(x)$ минава през точката $M(-1;2)$.

а) Да се изчисли параметърът a.

б) Да се реши уравнението

$$|2x - f(x)| = \frac{1}{2}.$$

в) Да се намери най-голямото цяло число, за което $g(x) \geqq f(x)$.

Задача 3. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ са изпълнени равенствата $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$ и $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$, а диагоналите му се пресичат в точка O.

а) Да се докаже, че $ABCD$ е успоредник.

б) Ако периметърът на четириъгълника $ABCD$ е 74 cm и дължината на страната AB е с 15% по-малка от дължината на страната AD, да се изчислят дължините на страните на $ABCD$.

в) Да се докаже, че

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\,\overrightarrow{MO},$$

където M е произволна точка.

Изпит за профил математика

Задача 1. Три момчета – Иван, Петър и Стоян, делят помежду си орехи. Отначало Иван дал на другите двама по една четвърт от своите орехи и още половин орех. След това Петър дал на Иван и Стоян по една четвърт от намиращите се в него орехи и още половин орех. Накрая същото направил и Стоян. В резултат на това се оказало, че всички имат по 30 ореха.

По колко ореха имал всеки първоначално?

Задача 2. Даден е изразът

$$f(x) = ab(a-b) + bx(b-x) + ax(x-a).$$

а) Да се разложи изразът $f(x)$ на множители.

б) Да се реши уравнението $f(x) = 0$.

в) Да се докаже, че ако $a > 0$, $b > 0$ и $a \neq b$, то

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{x_1} + \frac{x_1}{a} > 3,$$

където x_1 е решение на уравнението $f(x) = 0$.

Задача 3. За четириъгълника $ABCD$ е известно, че $AB = 2a$, $CD = a$, $AB || CD$, $\sphericalangle DAB = 75^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 15^\circ$. Точките M и N са среди съответно на отсечките AB и CD, а точките A_1 и B_1 са такива, че $\overrightarrow{NA_1} = \overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{NB_1} = \overrightarrow{CB}$.

а) Да се докаже, че точките A, A_1, B, B_1 лежат на една права.

б) Да се докаже, че $\sphericalangle A_1NB_1 = 90^\circ$.

в) Да се докаже, че $MN = \dfrac{a}{2}$.

г) Да се докаже, че лицето на $ABCD$ е равно на $\dfrac{3a^2}{8}$.

1991 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Дадена е функцията $f(x) = x + 4$.

а) Да се построи графиката на $f(x)$.

б) Да се изчислят координатите на пресечните точки на координатните оси с графиката на $f(x)$.

в) Да се намери най-голямото цяло число, което е решение на неравенството $f(x) - f(2) < 4$.

г) Да се реши уравнението

$$a^2 \cdot f(x) = 5a + x - 1,$$

където a е параметър, а x е неизвестно.

Задача 2. Един баща сега е с 21 години по-възрастен от сина си, а след 4 години ще бъде 4 пъти по-възрастен от него.

На колко години е синът?

След колко години бащата ще бъде 2 пъти по-възрастен от сина си?

Задача 3. В правоъгълния триъгълник ABC с прав ъгъл при върха C са построени ъглополовящата AD ($D \in BC$) и височината CH ($H \in AB$), пресичащи се в точка O. В триъгълника ABD е построена височината DN ($N \in AB$).

а) Да се докаже, че триъгълникът CDO е равнобедрен.

б) Да се докаже, че четириъгълникът $CDNO$ е ромб.

в) Ако $\sphericalangle ABC = 30^\circ$, $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{b}$, векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{OD}$ да се изразят чрез $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Изпит за профил математика

Задача 1. Ивайло често закъснявал за училище. За да го избави от тази неприятност. Майка му скришом „преместила“ часовника напред. Сутринта при тръгване за училище видял, че техният часовник показва 7:20, а като пристигнал в училище, разбрал, че е 7:15. На обяд излязъл от училище в 13:00, а като се прибрал вкъщи, техният часовник показвал 13:35.

С колко минути техният часовник е напред, ако се знае, че училищният часовник е точен и Ивайло отива и се връща от училище за едно и също време?

Задача 2. Числото b е цяло положително.

а) Да се разложи на множители изразът $A = 2b^2 - 9b - 5$.

б) Към числото b вдясно е приписана цифрата 5. Разликата на новополученото число и квадрата на числото b е разделена на числото b и от полученото число е извадено числото b. След извършване на указаните действия се е получило числото 1. Кое е числото b?

Задача 3. В равнобедрения триъгълник ABC ($CA = CB$) е дадено, че $\sphericalangle ACB = 100^\circ$. Построена е точка D върху лъча $BC^{\rightarrow}$ така, че $BA = BD$. Точката M е вътрешна за $\triangle ABC$, за която $\sphericalangle MAB = 10^\circ$ и $\sphericalangle MBA = 20^\circ$. Правите BM и AD се пресичат в точка P.

Да се докаже, че:

а) $AP = DP$;

б) $\triangle AMD$ е равностранен;

в) $\triangle DMC$ е равнобедрен;

г) $\sphericalangle CMB = 140^\circ$.

1992 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Дадени са функциите

$$f(x) = \frac{3 - 1{,}5x}{6} - \frac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{3x - 1{,}5}{3}}{4}$$

и $g(x) = |2x - 5|$.

а) Да се опрости изразът $f(x)$

б) Да се реши уравнението $f(x) - g(x) = 0$.

в) Да се реши уравнението

$$\frac{a}{6} - \frac{1}{2} - x \cdot f(x) + \frac{ax}{12} = 0,$$

където a е параметър.

г) Да се намери най-голямото цяло число, за което е изпълнено неравенството $f(x) \geqq 3x - 11$.

д) Да се намерят координатите на пресечните точки на графиките на $f(x)$ и $g(x)$ с координатните оси.

Задача 2. Антиквар купил два предмета, общо за 225 лева, и ги продал с 40% печалба. По колко лева е дал за всеки предмет антикварят, ако печалбата му за първия предмет била 25%, а за втория – 50%?

Задача 3. За триъгълника ABC е известно, че $\sphericalangle BAC = 75°$, $\sphericalangle ABC : \sphericalangle ACB = 2 : 5$, $BC = 2a$, CH е височина, а L е среда на BC.

а) Да се намерят ъглите на $\triangle ABC$.

б) Да се намери дължината на отсечката CD, където D е пресечната точка на симетралата на BC и продължението на височината на триъгълника през върха C.

в) Да се докаже, че $\triangle DBC$ е равностранен.

г) Пресечната точка на симетралата на BC и правата AB е F. Да се докаже, че CE е ъглополовяща на $\sphericalangle DCB$.

д) Ако точката M е среда на отсечката BD, да се докаже, че $HM = LM$.

Изпит за профил математика

Задача 1. Дадени са функциите

$$f(x) = 2x^2 + 1 \quad \text{и} \quad g(x) = 3x + 2.$$

а) Докажете равенството

$$f(a+1) = 2a + f(a-2) + g\left(\frac{10a}{3}\right) - 8.$$

б) Разложете на множители израза $A(x) = 3f(x) + 8g(x) + 5$.

в) Начертайте графиката на функцията $B(x) = \dfrac{1}{4}\sqrt{6A(x)}$.

г) Решете уравнението $B(x) = 6$.

д) Начертайте графиката на функцията $C(x) = f(x) - 1$.

Задача 2. Две свещи с еднаква дължина били запалени в 20 часа́. Едната свещ може да изгори цялата за 5 ча́са, а втората – за 4 ча́са. След известно време двете свещи били загасени едновременно.

а) В колко часа́ са загасени свещите, ако едната свещ при загасването е била 4 пъти по-дълга от другата?

б) В колко часа́ са загасени свещите, ако едната свещ при загасването е била a пъти по-дълга от другата?

Задача 3. Даден е равнобедрен триъгълник ABC, $(AC = BC)$. Върху правата AB са избрани точки M и N такива, че $MA = AC$, (A е между M и B), и $NB = BC$, (B е между A и N). Построени са ъглополовящите MP, $P \in NC$, и NQ, $Q \in MC$, съответно на $\sphericalangle CMN$ и $\sphericalangle CNM$. Точката O е пресечна точка на MP и NQ.

а) Докажете, че $ABPQ$ е равнобедрен трапец.

б) Намерете $\sphericalangle MON$, ако $\sphericalangle ACB = \gamma$.

в) Докажете, че правата CO е симетрала на отсечките QP, AB, MN и ST, където S и T са съответно пресечните точки на PQ с AC и BC.

г) Докажете, че ако $\sphericalangle CAB = 72^\circ$, то:

1) AP е ъглополовяща на $\sphericalangle CAB$;

2) четириъгълникът $MAPQ$ е успоредник;

3) четириъгълникът $QAPC$ е равнобедрен трапец.

1993 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Дадени са функциите

$$f(x) = (3x - k)^2 + 2(x + 1) \qquad g(x) = (k + 3)(k - 3) + (3x + 1)(3x - 1).$$

А. Да се намерят стойностите на реалния параметър k, за които уравнението $f(x) = g(x)$:

а) няма решение;

б) има за корен цяло число, ако k е цяло число;

в) е еквивалентно (равносилно) на уравнението $2x = 1$.

Б. Да се реши неравенството $f(x) \leqq g(x)$.

В. Нека $k = \sqrt{10}$. Да се построи графиката на функцията $h(x) = \dfrac{2}{9} \cdot g(x)$.

Задача 2. а) Цифрата на десетиците на едно двуцифрено число е два пъти по-голяма от цифрата на единиците му. Сборът на даденото число с числото, записано със същите цифри, но в обратен ред, е равен на 99. Намерете числото.

б) Намерете всички делители на числото 63.

в) Намерете всички три цифрени числа, които се делят на 9 и две от цифрите на които са 6 и 3.

Задача 3. Даден е равнобедрен правоъгълен триъгълник ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$). Построени са ъглополовящите AL и BM на вътрешните ъгли ($L \in BC$, $M \in AC$). AL и BM се пресичат в точка O.

А. Да се докаже, че:

а) $AL = BM$;

б) LM и AB са взаимно успоредни;

в) правата CO е симетрала на отсечката AB.

Б. Да се пресметне в големината на $\sphericalangle LOM$.

Изпит за профил математика

Задача 1. Дадени са функциите $f(x) = x^2$ и $g(x) = 2x - 1$.

а) Начертайте графиката на функцията $y = g(x)$.

б) Начертайте графиката на функцията $y = |g(x)|$.

в) Докажете, че за всяко x е изпълнено неравенството $g(x) \leqq f(x)$.

г) Да се намери най-голямата стойност на функцията

$$y = g(x) - f(x).$$

д) Да се намери най-малката стойност на функцията

$$y = g(2x + 1) + f(x).$$

е) Да се докаже тъждеството

$$g(a - b) + f(a - b) + 2 = f(a - b + 1).$$

Задача 2. От пристанище A на една река едновременно тръгнали по течението моторна лодка и сал. Скоростта на моторната лодка в неподвижна вода е u km/h, а скоростта на течението на реката е v km/h ($u > v > 0$).

След t_1 ча́са моторната лодка стигнала до пристанище B, тръгнала веднага обратно, срещнала сала в точка C и се върнала в A без спиране.

Разстоянието от B до C изминала за t_2 ча́са. Моторната лодка пътувала общо 28 ча́са. Разстоянието от A до B е равно на 192 km, а разстоянието от A до C е 48 km.

а) Да се изрази чрез u, v, t_1 и t_2 дължината на изминатите разстояния от моторната лодка и от сала от пристанище A до срещата им в C.

б) Да се докаже, че $t_1 = t_2$.

в) Да се докаже, че $u = 7v$.

г) Да се намери скоростта на сала.

Задача 3. Даден е равнобедрен правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза AB. Точката M е средата на хипотенузата AB. През точката C е построена произволна права l, която няма обща точка с отсечката AB. От върховете A и B към l са спуснати перпендикуляри AP и BQ $(P, Q \in l)$. Правите QM и PA се пресичат в точка E, а правите PM и BQ – в точка F.

А. Да се докаже, че:

а) триъгълниците APC и CQB са еднакви;

б) $PQ = AP + BQ$;

в) $PM = QM$;

г) $\sphericalangle PMQ = 90^\circ$;

д) четириъгълникът $EFQP$ е квадрат.

Б. Да се намери лицето на четириъгълника $EFQP$, ако правите l и AB са успоредни и $AC = \sqrt{2}$.

1994 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Дадените са изразите

$$A(x) = (x-1)^2 - (x-7)(x-3), \quad B(x) = \frac{x-1}{7} - \frac{5-12x}{14}$$

и $C = \left(\sqrt{8} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$.

а) Опростете дадените изрази.

б) Решете уравнението $\dfrac{A(x)}{4} - 2B(x) = 1$.

в) Решете уравнението $\dfrac{A(x)}{4} - B(x) = 1$.

г) Решете уравнението $A(x) \cdot B(x) = A(x) \cdot C$.

д) Решете неравенството $3B(x) - A(x) \geqq 6C$.

е) Начертайте в една координатна система графиките на функциите $f(x) = \dfrac{A(x)}{4}$, $g(x) = B(x) - \dfrac{9}{2}$ и $h(x) = 2C$.

ж) Пресметнете лицето на триъгълника, заграден от трите графики в е).

Задача 2. Един килограм слънчогледово семе струва 10 лв., а един килограм овес – 6 лв. Един вид храна за папагали се състои от 30% слънчогледово семе и 70% овес.

а) Колко струва един килограм от този вид храна за папагали?

б) Колко килограма слънчогледово семе се съдържа в посочения вид храна, която струва 120 лв.?

в) Колко килограма такава храна най-много може да се приготви от 5 kg слънчогледово семе и 9,1 kg овес? От коя съставка ще остане след приготвянето на храната и колко?

Задача 3. В равнобедрения трапец $ABCD$ ($AB||CD$, $AD = DC$) е дадено, че $AD \perp BD$.

а) Намерете ъглите на трапеца и периметъра му, ако $BC = 6$ cm.

б) Докажете, че лицето на триъгълника BCD е $\frac{1}{3}$ от лицето на трапеца.

в) Докажете, че симетралата на отсечката BD минава през средата M на отсечката AB.

г) Докажете, че

$$\frac{3}{2}CD < OC + OD + OM < 3CD,$$

където O е пресечната точка на диагоналите на трапеца $ABCD$.

Изпит за профил математика

Задача 1. Дадени са изразите $P = b^2x + 2b$ и $Q = 4x + b^2$. Ако b е параметър, а x е неизвестно:

а) да се реши уравнението $P = Q$;

б) да се намерят онези цели стойности на параметъра b, за които уравнението $P = Q$ има поне едно цяло решение;

в) да се реши неравенството $P > Q$ при

$$b = 2\left(\frac{1}{16^2} + \frac{1}{8^3}\right) : \left(\frac{1}{4}\right)^4 - 25 : \sqrt{3^2 + 4^2}.$$

Задача 2. На световно футболно първенство отборите A и B играли помежду си два мача. В първия мач отбор A вкарал два пъти повече голове от отбор B, а във втория мач отбор B вкарал два пъти повече голове от отбор A.

а) Кои са възможните резултати от двата мача, ако е известно, че общият брой на головете от двата мача е 12?

б) Кои са възможните резултати от двата мача, ако е известно, че отбор A и в двата мача е вкарал един и същ брой голове, а общият брой голове от двата мача е по-малък от 17?

Задача 3. В триъгълник ABC е дадено, че $\sphericalangle ACB = 36^\circ$, $CA = CB$, а BL е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$ ($L \in AC$). Симетралата на отсечката BL пресича правите AB и AC съответно в точките N и P.

Да се докаже, че:

а) $LN || BC$;

б) $AL = BN$;

в) $\sphericalangle ACN = \sphericalangle PCN$.

1995 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Външните ъгли при върховете A, B и C на триъгълника ABC се отнасят както $6 : 7 : 11$. Точка M е среда на страната BC.

а) Да се докаже, че триъгълникът ABC е правоъгълен.

б) Да се намерят градусните мерки на $\sphericalangle BAM$ и $\sphericalangle CMA$.

в) Да се докаже, че $\dfrac{AC}{2} < AM < AC$ и $AM < \dfrac{AB + AC}{2}$.

Задача 2. Нека

$$f(x) = (x - a)^2 + x^2 - a^2 \text{ и } g(x) = (x + a)^3 - (x^3 + a^3).$$

а) Да се разложат $f(x)$ и $g(x)$ на множители.

б) Да се реши уравнението $f(x) = g(x)$.

в) Ако $a = 1$, да се начертаят графиките на функциите

$$h(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{3}g(x), \text{ където } x \in \{-1; 0; \frac{1}{2}; 2\},$$
$$\text{и } t(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{3}g(x), \text{ където } x \in [-1; 2].$$

Минава ли графиката на $t(x)$ през началото на координатната система?

Задача 3. От град A за град B тръгнал автобус със скорост 50 km/h. След 12 минути от тръгването си, той срещнал лека кола, идваща от град B със скорост 60 km/h.

Леката кола пристигнала в град A и след престой от 4 минути тръгнала обратно към B. На 54 km от B тя настигнала автобуса.

а) Да се намери разстоянието от A до B.

б) Ако след настигането леката кола увеличи скоростта си с 35%, а автобусът увеличи скоростта си с 4 km/h, колко минути по-рано от автобуса ще пристигне леката кола в B?

Изпит за профил математика

Задача 1. Дадена е функцията

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{7-3x}{2}\right) - \frac{3+x}{2}.$$

а) Да се реши неравенството $f(x) < 1$.

б) Да се реши неравенството

$$-12af(x) - 5x + 10 < 0,$$

където a е параметър.

в) Да се докаже, че неравенствата

$$f(x) < 1 \text{ и } -12af(x) - 5x + 10 < 0$$

не са еквивалентни за никоя стойност на параметъра a.

г) Да се реши уравнението $3|f(x)| - 2|3x - 1| + 1 = 0$.

Задача 2. Една цистерна с минерална вода разпределили в две детски градини.

а) В първата детска градина напълни няколко бидона от 40 l и два пъти повече бидони от 20 l. Същото количество вода би могло да се напълни в няколко бидона от 20 l и два пъти повече бидони от 40 l и тогава общият брой бидони ще бъде с три по-малък, отколкото в действителност са напълнили.

б) Във втората детска градина напълнили няколко бидона по 30 l, като един от бидоните не е съвсем пълен, а останалите са пълни. Ако същото количество вода за тази детска градина се налее в бидони по 50 l, ще бъдат напълнени изцяло 5 бидона по-малко.

По колко литра вода са докарали във всяка детска градина?

Задача 3. В правоъгълник $ABCD$ са построени перпендикуляри BP и DH към AC $(P, H \in AC)$.

а) Да се докаже, че точките B, H, D и P са върхове на успоредник или точките P и H съвпадат.

б) Нека точките P и H делят диагонала AC на три отсечки, една от които е равна на сумата на другите две. Да се изчислят $\sphericalangle DBC$ и $S_{ABCD} : S_{ABH}$.

1996 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Дадена е функцията

$$f(x) = \left(\frac{3x}{2} - 1\right)^2 - (1{,}5x - 2)(1{,}5x + 2).$$

а) Да се докаже, че $f(x) = 5 - 3x$ и да се построи нейната графика.

б) Да се реши уравнението

$$2 - 3|f(x)| = -1.$$

в) Да се намери най-голямото цяло число k, което е решение на неравенството

$$(3 - k)f(1) \geqq f\left(-\frac{2}{3}\right).$$

Задача 2. Златарска работилница изработва златни пръстени и гривни.

а) В една поръчка от общо 81 гривни и пръстени, броят на гривните е 35% от броя на пръстените. Колко са пръстените в тази поръчка?

б) В друга поръчка трябва да се изработят златни гривни по 13 g едната и два пъти повече пръстени по 7 g единия.

Най-много колко гривни могат да се изработят, ако работилницата разполага със 770 g злато?

Задача 3. За трапец $ABCD$ с основи AB и CD е дадено, че

$$\sphericalangle BCD = \frac{1}{3} \sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \sphericalangle BAD.$$

Да се докаже, че:

а) $AB \perp AD$;

б) $DM > \dfrac{BC}{2}$, където M е средата на отсечката AC;

в) ако $AB = AD$, то $BD = BC$.

Изпит за профил математика

Задача 1. Дадена е функцията

$$f(x) = 0{,}2(5x+2) - \frac{2-x}{3} - \frac{1}{3}\left(5\frac{1}{5} - 2x\right).$$

а) Да се представи $f(x)$ чрез многочлен в нормален вид.

б) Да се реши неравенството $f(2x-2) < 4x - 2\sqrt{10}$.

в) За коя стойност на параметъра a уравненията

$$f(x) + 1 = 2x \quad \text{и} \quad (a^2x - 1)^2 = (a - a^2x)^2$$

са равносилни (еквивалентни)?

Задача 2. Симетралата на диагонала BD на правоъгълника $ABCD$ пресича страните AB и CD съответно в точки M и N, като $DN = 2NC$.

а) Да се докаже, че триъгълникът NMB е равностранен.

б) Да се докаже, че $\frac{1}{2}AC < MN < AC$.

в) Да се намери лицето на правоъгълника $ABCD$, ако лицето на триъгълника MNB е 6 cm^2.

Задача 3. Параход тръгнал в 6 часа́ по течението на една река от пристанище A за пристанище B. Когато се намирал 40 km по-близо до B, отколкото до A, от пристанище A към пристанище B тръгнал втори параход.

За 15 минути първият параход изминал 10 km по течението, а вторият параход за същото време изминал 14 km срещу течението на реката. Разстоянието от A до B е 240 km, а скоростта на течението е 2 km/h.

а) В колко часа́ е тръгнал от A вторият параход?

б) Двата парахода престояли в B по 30 минути и тръгнали обратно за A. Да се докаже, че след тръгването си от A до връщането си в A, вторият параход е бил 4 пъти на разстояние 20 km от първия параход и да си намери в колко часа́ е станало това.

1997 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Дадени са изразите

$$A = 2x - \frac{2x-1}{3} + \frac{1-2x}{6} - 1,5 \text{ и } B = (2+x)^2 - 2(1-x)^2 + (-x+2)^2.$$

а) Да се преведат A и B в нормален вид.

б) За кои стойности на x е изпълнено равенството $A \cdot B = 0$?

в) Да се провери дали числото $a = \dfrac{2^{10} \cdot 3^9}{12^6} - 9$ е решение на неравенството $A > B$.

Задача 2. В един ресторант разполагали се два вида кайма от свинско и телешко месо с общо тегло 50 kg. В първия вид кайма количествата свинско и телешко месо били съответно в отношение 3 : 2, а във втория вид свинското месо било 70%. След смесването им се получила кайма, съдържаща 36% телешко месо.

а) Колко килограма е била каймата от първия вид?

б) Колко още килограма телешко месо на кайма трябва да се добави към цялата смес, за да се получи кайма, съдържаща 50% свинско месо?

Задача 3. Върху страната AB на триъгълника ABC има такава точка M, че $\sphericalangle BMC = 60^\circ$ $(M \neq A)$. Построени са височините AA_1 и BB_1 съответно в $\triangle ACM$ и $\triangle BCM$ $(A_1, B_1 \in CM)$.

а) Да се изчисли дължината на отсечката AB, ако $A_1B_1 = 7$ cm.

б) Да се докаже, че триъгълниците AMB_1 и A_1MB са равнолицеви.

в) Да се докаже, че ако CM е медиана в триъгълника ABC, то AB_1 е успоредна на A_1B.

Изпит за профил математика

Задача 1. а) Да се разложат на множители от първа степен изразите

$$A = t^2 - 2t - 3 \ \text{ и } \ B = (x^2 - 2x)^2 + 2(2x - x^2) - 3.$$

б) Да се докаже, че за всяко x е изпълнено неравенството $B > -5$.

в) Да се намерят всички цели числа x, за които стойността на израза B е равна на 1152.

Задача 2. В пристанище А танкер разтоварил 1997 тона нефт в два вида цистерни: едните с вместимост 20 тона, а другите – 47 тона. След разтоварването танкерът трябвало да измине разстоянието до пристанище В за 20 ча́са. Поради удължаване на престоя в А, за да пристигне танкерът навреме в В, се наложило да увеличат скоростта му с $6\dfrac{2}{3}\%$.

а) С колко ча́са повече от предвиденото време е продължил престоят в А?

б) В колко цистерни са разтоварили нефта, ако се знае, че общият брой на цистерните е възможно най-малък и всички цистерни са напълнени догоре?

Задача 3. Външно за равностранния триъгълник ABC е построен равнобедрен правоъгълен триъгълник ACD с хипотенуза AC. Симетралите на отсечките AB и BC се пресичат в точка O, а перпендикулярът, издигнат от точката C към правата BC, пресича правата BD в точка P.

Да се докаже, че:

а) точката O лежи на правата BD;

б) четириъгълникът $AOCP$ е ромб;

в) $\dfrac{OD}{2} < OB < OD$.

1998 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. а) Решете уравнението

$$(x+5)(x+2)-3(4-3x)=(x-3)^2.$$

б) Решете неравенството

$$\frac{1}{2}\left(2-\frac{6-x}{3}\right)-1\frac{7}{8}<x.$$

Задача 2. Даден е изразът $A=x^2-9+4y^2-4xy$.

а) Разложете A на множители.

б) Пресметнете числената стойност на $|A|$, ако

$$x=y=6\left(\frac{1}{18^2}:\frac{1}{18}-\frac{8^4\cdot 3^8}{36^5}\right).$$

Задача 3. В една галерия продали две скулптури и една картина общо за 720 000 лева. Едната скулптура била 3 пъти по-скъпа от другата, а картината била с $14\frac{2}{7}\%$ по-скъпа от по-евтината скулптура. За колко лева са продали картината?

Задача 4. Равнобедрените триъгълници ABC и ABD имат общата основа AB (точките C и D са различни).

а) Докажете, че $AB\perp CD$.

б) Пресметнете градусните мерки на ъглите в триъгълника ABC, ако $DC=AD$ и $\sphericalangle DAB:\sphericalangle DCB=1:2$.

в) Ако лъчът $AB^{\to}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle DAC$ и M е произволна точка върху отсечката CD, докажете, че

$$BD-\frac{CD}{2}<AM\leqq BD.$$

Изпит за профил математика

Задача 1. Дадено е уравнението

$$a^2x = 2 + 4x - a,$$

където a е параметър.

а) Решете уравнението.

б) За кои цели стойности на параметъра a даденото уравнение има само цели корени?

в) Намерете всички стойности на параметъра a, при които числото 1 е корен на уравнението.

Задача 2. Един фермер отглежда само бели и червени пилета, общо на брой 1998. Белите пилета са повече от червените и техният брой е число, което се дели на 97, а броят на червените се дели на 9.

а) Докажете, че броят на белите пилета се дели на 9.

б) Колко са белите пилета?

Задача 3. В $\triangle ABC$ ъглите при върховете A и B са остри. Ъглополовящата BT ($T \in AC$) и височината CH ($H \in AB$) се пресичат в точка O, като $CO = CT$.

а) Докажете, че $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

б) Ако CE ($E \in AH$) е ъглополовяща на $\sphericalangle ACH$, докажете, че $BC = BE$.

в) Изчислете периметъра на $\triangle COT$ при условие, че $CH = 12$ cm и $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle CAB$.

1999 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Дадени са изразите

$$A = \frac{5}{4}\left(x^2 - \frac{4}{5}x\right) - \left(\frac{1}{2}x - 3\right)\left(3 + \frac{1}{2}x\right) - 11$$

и

$$B = x(x-5)^2 + 4x(2x-3) - (x-2)^3 - (-2x)^2.$$

а) Приведете изразите A и B в нормален вид.

б) Пресметнете числото $C = \dfrac{16^5 \cdot 81^3 \cdot (-2)^6}{(-27)^3 \cdot 4^{13}}$ и след това решете уравнението $B = C$.

в) Разложете израза A на множители и намерете всички цели числа x, за които $A < 0$.

Задача 2. Моторна лодка изминава разстоянието от пристанище A до пристанище B по течението на река за 3 h 30 min, а се връща обратно от B до A за 4 h 40 min. Скоростта на течението е 2,5 km/h.

а) Определете скоростта на лодката в спокойна вода и разстоянието между двете пристанища.

б) На какво разстояние най-много може да се отдалечи лодката от пристанище A, ако трябва да бъде отново в A след не повече от 1 h 24 min?

Задача 3. Диагоналът AC на успоредника $ABCD$ е ъглополовяща на $\sphericalangle BAD$.

а) Докажете, че $ABCD$ е ромб.

б) Намерете лицето на $ABCD$, ако $AC = 12$ cm и $BD = 4\frac{1}{6}$ cm.

в) Ако DL е ъглополовяща на $\sphericalangle ADB$ ($L \in AB$), докажете, че $AL < AD$ и $\sphericalangle DLB > \sphericalangle BCD$.

Изпит за профил математика

Задача 1. За числата a и b е известно, че $ab \neq 0$ и

$$a^4 = 3a^2b + 4b^4.$$

а) Докажете, че $a^2 = 4b^2$ и $|a| = 2|b|$.

б) Намерете числените стойности на изразите

$$A = \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad B = \frac{(a+b)^4}{a^4 + b^4}.$$

в) Намерете всички цели числа a, за които

$$999 \cdot |a| + |b| \leqq 1999.$$

Задача 2. На гара А има 20 големи и 260 малки контейнера, които трябва да бъдат превозени с железопътен транспорт до гара В. На един вагон с товароподемност 80 тона, могат да бъдат натоварени най-много 30 малки контейнера по 2 тона. Един голям контейнер заема мястото на 9 малки и тежи 30 тона. Намерете минималното количество вагони, което е достатъчно за превозването на всички контейнери и покажете как ще бъдат разпределени контейнерите във всеки вагон.

Задача 3. Даден е успоредник $ABCD$, в който ъглополовящите на $\sphericalangle DAB$ и $\sphericalangle ADC$ се пресичат в точката K. Точките M и N са средите съответно на страните AD и BC.

а) Докажете, че точките M, N и K лежат на една права.

б) Пресметнете периметъра на $ABCD$, ако $BK = CK = AB = 5$ cm.

2000 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Даден е изразът

$$A = x(2-x)^2 - 9x + 2(x+1)^2.$$

а) Да се приведе A в нормален вид.

б) Да се разложи A на множители.

в) За кои стойности на x е изпълнено равенството $A = 0$?

г) За кои стойности на x е изпълнено неравенството $A \leqq 2(1-x)$?

Задача 2. Група деца отишли на излет на реката. Да се намери броят на децата във всеки от случаите, ако:

а) отначало 6 деца преплували на отсрещния бряг, след това половината от останалите деца също преплували реката. Така децата, които преплували реката, се оказали 2 пъти повече от тези, които не са я преплували.

б) броят на момичетата в групата е по-малък от 14 и е 28% от броя на всички деца.

Задача 3. За триъгълника ABC е известно, че $CA = CB$ и $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Ъглополовящите AD и BE на $\triangle ABC$ ($D \in BC$, $E \in AC$) се пресичат в точка S.

а) Да се намери големината на $\sphericalangle ASB$.

б) Да се докаже, че $CS \perp AB$.

в) Да се докаже, че $\triangle CDS$ е равнобедрен.

г) Да се докаже, че $CD < AS$.

Изпит за профил математика

Задача 1. Докажете че:

а) $\dfrac{0{,}2^6 - (-0{,}2)^5}{0{,}2^5 - (-0{,}2)^4} > \dfrac{12^8 \cdot 9^3}{(-27)^5 \cdot 16^4}$;

б) уравнението

$$|x-1| - (-x-1)^2 = (1-x)(1+x) + \frac{3}{2}|1-x| - 2\left(x + \frac{3}{4}\right)$$

няма решение;

в) уравненията $ax - a^2 = 2x - 4$ и $a^2(x-1) = 3(3x-a)$ не са еквивалентни за никоя стойност на параметъра a.

Задача 2. По телевизионния канал XYZ се излъчва сериалът *Дързост и математика*. В сериала участват 2000 души – мъже, жени и деца. Броят на мъжете и броят на жените се отнасят съответно както 9 : 7. Ако участваха 50 деца повече, броят на участващите деца щеше да е два пъти по-малък от броя на мъжете.

Броят на сериите в сериала е четирицифрено число $\overline{aabb}$, където a и b са различни нечетни естествени числа, такива че

$$a^2b^2 + b^2 + 8b = 2b^3 + 4a^2 + 4.$$

а) Намерете броя на децата, участващи в сериала.

б) Намерете броя на всички серии.

в) Във всяка серия поне един от героите плаче. Докажете, че има участник, който плаче в поне две серии.

Задача 3. Върху страната CD на правоъгълника $ABCD$ е построена точка M такава, че $AM = BM$. Точката N е средата на страната AB, правите AM и DN се пресичат в точка T, а правите BM и CN се пресичат в точка K. Докажете, че:

а) M е средата на страната CD;

б) четириъгълникът $MTNK$ е ромб;

в) ако $MTNK$ е квадрат, то $AB = 2AD$.

2001 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Представете изразите

$$A = (x-1)(x^2+1)(x+1) - (x^2-1)^2 - (x+2)(x+4) + 19$$

и

$$B = x(x+2)^2 - (x-1)(x^2+x+1)$$

в нормален вид и намерете стойностите на x, за които:

а) $A \cdot B = 0$;

б) $A > \dfrac{1}{4}B$;

в) $A - B = 0$, като преди това разложите $A - B$ на множители.

Задача 2. Ученик решил да прочете една книга, в която имало стихотворения, басни и разкази, общо 60 на брой. Стихотворенията били двойно повече от басните и с 5 по-малко от разказите.

За да прочете книгата в определен срок, той трябвало да прочита по 25 страници на ден, но тъй като му оставало свободно време, прочитал ежедневно с 16% повече страници от предвидените и затова последния ден му останали за четене само 5 страници.

а) Колко на брой са разказите в книгата?

б) За колко дни е прочел книгата и колко страници има тя?

Задача 3. Върху основата AB на равнобедрения триъгълник ABC са дадени точките M и N, така че $AM = BN < \dfrac{AB}{2}$. Точките P и Q са петите на перпендикулярите, спуснати от M и N съответно към AC и BC, като правите MP и NQ се пресичат в точка S. Да се докаже, че:

а) $AP = BQ$;

б) S лежи на симетралата на отсечката AB;

в) $PQ || AB$ и $PQ \perp CS$;

г) $CN < AC$.

Изпит за профил математика

Задача 1. Дадени са уравненията

$$\left(x-\frac{6-x}{2}\right)\left(6\frac{2}{3}+\frac{x-2}{0{,}3}\right)=0$$

и

$$|(x-2)^3-x(3-x)^2-2(x-4)-a|=\frac{(-2)^{2001}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1300}}{32^{100}\cdot(-8)^{67}},$$

където a е параметър. Решете дадените уравнения и след това намерете за кои стойности на a двете уравнения са равносилни.

Задача 2. Пешеходец A, велосипедист B и тракторист C се движат в една и съща посока съответно със скорост a km/h, b km/h и c km/h. В момента, когато B и C са в една точка M, A е на 15 km пред тях, а в момента, когато A и C са в една точка N, B е на 7,5 km след тях.

а) Докажете, че $2b=a+c$.

б) Намерете разстоянието между A и C в момента, когато B настига A.

в) Намерете разстоянието NP, ако $MP=33$ km и P е точката, в която B настига A.

Задача 3. Даден е $\sphericalangle ABC=\alpha<90^\circ$, а P и Q съответно върху лъчите $BA^{\rightarrow}$ и $BC^{\rightarrow}$. От точката P е издигнат перпендикуляр p към $BA^{\rightarrow}$ и от точката Q е издигнат перпендикуляр q към $BC^{\rightarrow}$. Правите p и q се пресичат в точка M, като P и M лежат в различни полуравнини относно лъча $BC^{\rightarrow}$. Ъглополовящата на $\sphericalangle PMQ$ пресича лъчите $BA^{\rightarrow}$ и $BC^{\rightarrow}$ съответно в точки K и L.

а) Изразете $\sphericalangle PMK$ чрез α.

б) Докажете, че $\triangle BKL$ е равнобедрен.

в) Докажете, че симетралата на отсечката PQ разполовява отсечката BM.

г) Ако $BP=PQ=QM$, пресметнете ъглите на $\triangle BPQ$.

2002 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Представете изразите $A = (2x-5)^2 - (2x-1)(1+2x)$ и

$$B = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4x^2 - 7}{4}$$

в нормален вид и намерете стойностите на x за които:

а) $A = B$;

б) $|B| = 3$;

в) $A \cdot B > 0$.

Задача 2. Рок група дава благотворителен концерт, средствата от който дарява за построяване на детски санаториум. Билетите за концерта са по 10 лева и по 15 лева, а печалбата от него е 30 250 лева.

а) Колко са феновете на групата, посетили концерта, ако броят на закупилите по-евтините билети е с 1000 по-голям от броя на останалите?

б) Колко лева трябва да се съберат за построяването на санаториума, ако парите, дарени от групата, представляват 2,5% от всички необходими средства?

Задача 3. Даден е квадрат $ABCD$, диагоналите на който се пресичат в точка S. Точка M от диагонала AC е такава, че $AM = AB$.

а) Намерете $\sphericalangle BMC$ и $\sphericalangle CDM$.

б) Докажете, че ако $N \in AB$ и $MN \perp AB$, то $SB = MN$.

в) Намерете разстоянието от точката M до правата AB, ако дължината на диагонала на квадрата е 6 cm.

г) Докажете, че $MS + SB = BC$.

Изпит за профил математика

Задача 1. За кои стойности на параметъра a уравнението

$$x + 2 = a(a - x - 1) \ :$$

а) има корен $(-1)^{2002}$;

б) е равносилно на уравнението

$$x - \frac{x - \frac{x-1}{2}}{2} = \frac{x}{0{,}8};$$

в) има единствен корен, чийто квадрат е по-малък от числото 1.

Задача 2. В колба се намира колония от N бактерии. В един момент в колбата попада вирус. В първата минута вирусът унищожава една бактерия и веднага след това вирусът и останалите бактерии се размножават, като се делят на две.

През следващите минути процесът се повтаря. През втората минута новите два вируса унищожават две бактерии (всеки по една), а след това вирусите и останалите бактерии се размножават, като се делят на две и т.н.

а) Да се изрази чрез N броят на бактериите в края на петата минута.

б) В минутата, когато вирусите станали повече от 2002, в колбата не останала нито една бактерия, а в предишната минута колонията все още не била загинала. Да се намери числото N.

Задача 3. В триъгълник ABC е построена ъглополовящата CL ($L \in AB$), а точките M и N са съответно върху страните AC и BC, различни от върховете на триъгълника. Да се докаже, че:

а) ако правата MN е симетрала на отсечката CL, то $LM = LN$ и $\sphericalangle ALM = \sphericalangle ABC$;

б) ако $AL = AM$ и $BL = BN$, то $MN || AB$;

в) ако $AC > BC$, то $AL > BL$.

2003 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Дадени са изразите $A = (x+3)^2 - (-x-2)^2 - 6$ и

$$B = (2-x)^2 - 3(1-x)(x+1).$$

а) Приведете A и B в нормален вид.

б) Намерете стойностите на x, за които $B \leqq 0$.

в) Намерете стойностите на x, за които $A^2 = A - B$.

г) Намерете стойностите, за които $|A| = \dfrac{1}{4}$.

Задача 2. През месец юни в канцеларията Националната природо-математическа гимназия имало 2003 обаждания по телефона. През третото десетдневие обажданията били с $14\frac{2}{7}\%$ повече, отколкото през второто, а през първото обажданията били с 297 по-малко, отколкото през третото десетдневие. Колко са били обажданията през третото десетдневие?

Задача 3. В равнобедрения триъгълник ABC $(CA = CB)$ ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ и симетралата на страната AC се пресичат в точка D. Разликата на два от ъглите в триъгълник ABC е 90°.

а) Намерете ъглите на $\triangle ABC$.

б) Докажете, че четириъгълникът $ADBC$ е ромб.

в) Нека x, y и z са разстоянията от произволна вътрешна точка в $\triangle ACD$ съответно до правите AC, CD и DA. Да се докаже, че

$$AB = 2(x+y+z).$$

Изпит за профил математика

Задача 1. Даден е многочленът

$$A = \left(x + \frac{a^2}{2}\right)^2 + (a-1)(a^2+a+1)x - a\left(x + \frac{a^3}{2}\right).$$

а) Намерете сумата от целите числа, които са решения на неравенството $A < 0$, ако

$$a = \frac{0{,}25^{2003} \cdot 16^{1000}}{4 \cdot (-0{,}125)^3}.$$

б) За кои стойности на a коефициентът пред x в нормалния вид на A е неотрицателно число?

Задача 2. Група туристи тръгнали в 12 ч. от хижа „Незабравка" по определен маршрут. В 12:30 ръководителят на групата се сетил, че е забравил компаса в хижата. Групата продължила да се движи със същата скорост, а той се върнал за компаса и успял да догони групата в 14 ч.

а) В колко часа ръководителят е взел компаса, ако скоростта му е била постоянна и пристигайки в хижата, веднага се е върнал обратно?

б) Ако в 13:05 един от туристите реши да се върне за забравения в хижата пакет със сандвичи и се движи с два пъти по-голяма скорост от скоростта на групата, в колко часа този турист и ръководителят на групата ще се срещнат?

Задача 3. Даден е квадрат $ABCD$. Точките M и N са средите съответно на AD и CD, а отсечките BN и CM се пресичат в точка O. Докажете, че:

а) $\sphericalangle BOM = 90^\circ$;

б) $AO = AB$.

2004 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Дадени са изразите

$$A = (2x+1)^2 - 2(1+x)(x-1) + x$$

и

$$B = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17-4x}{4}.$$

а) Приведете A и B в нормален вид.

б) Решете уравнението $A = 2B$.

в) Намерете най-голямата цяла стойност на x, за която $A < 2x^2$.

г) Намерете всички стойности за x за които $A \cdot B = 0$.

Задача 2. В един квартал имало 2004 дървета: тополи, липи и кестени. Тополите били 5 пъти повече от липите, а кестените били с 310 повече от тополите.

а) Намерете броя на кестените.

б) Част от дърветата били изсечени заради строежи. Броят на изсечените е 9,1% от броя на останалите дървета. Колко дървета са останали в квартала?

Задача 3. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с височина CD ($D \in AB$) и ъглополовяща AL ($L \in BC$). През точката C е построена права m, успоредна на AL и пресичаща правата AB в точка E. Да се докаже, че:

а) $AC = AE$;

б) ако $\sphericalangle BCE = 90^\circ$, то CA е медиана в $\triangle BCE$;

в) ако $AC + AD = BD$, то $\sphericalangle CAB = 2 \sphericalangle ABC$.

Изпит за профил математика

Задача 1. Дадено е уравнението

$$(1+a)^3 - a^2(3+9x+a) + x = 0,$$

където a е параметър, а x е неизвестно.

а) Решете уравнението.

б) За кои стойности на параметъра a даденото уравнение има поне един положителен корен?

в) Има ли даденото уравнение решение при

$$a = -\frac{4 \cdot (-2004^4)^5}{12^{21} \cdot 167^{20}} \ ?$$

Задача 2. Жоро не записал мобилния телефон на приятелката си и забравил последните шест цифри. Той си спомнял, че те образуват шестцифрено число x с различни цифри, последните три от които образуват трицифрено число y, чието квадрат е равен на x.

Обяснете как Жоро е възстановил телефонния номер на приятелката си.

Задача 3. Даден е триъгълник ABC с ъглополовяща BL $(L \in AC)$. Върху отсечката BL е построена точка M, така че $AM = AC$ и $\sphericalangle MCB = 30^\circ$. Ако H е средата на отсечката CM, да се докаже, че:

а) разстоянието от точката M до правата BC е два пъти по-малко от дължината на отсечката CM;

б) лъчите $AM^{\to}$ и $AH^{\to}$ разделят $\sphericalangle CAB$ на три равни части;

в) $\sphericalangle AMB = 150^\circ$;

г) $AB > BC$.

2005 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. Да се реши наравенството

$$\left(3x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\left(x-\frac{x-19}{3}\right)\geqq\left(-3x-\frac{1}{3}\right)^2.$$

б) Да се провери кое от числата $a=2\frac{1}{3}:\left(-\frac{5}{6}\right)-6\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)$,

$$b=3{,}5-1:0{,}2+\frac{7{,}2-3{,}2}{4}\quad\text{и}\quad c=\frac{(-3)^7\cdot 5^4}{3\cdot 15^5}$$

е решение и кое не е решение на даденото наравенство.

Задача 2. В „Академия за звезди“ девойките са три повече от младежите и броят им е $57\frac{1}{7}\%$ от общия броя участници.

а) Да се намери броят на всички участници в Академията.

б) Да се намери средната възраст на всички участници, ако е известно, че в сборът от годините им е най-голямото нечетно естествено число, за което $\frac{n}{0{,}2}<2005$.

Задача 3. Диагоналите на ромба $ABCD$ се пресичат в точка O. Точките M и N са среди съответно на страните AB и CD и

$$\sphericalangle BAC:\sphericalangle ABC=1:10.$$

а) Да се докаже, че точките M, N и O лежат на една права.

б) Да се докаже, че $\sphericalangle BMO=30^\circ$.

в) Ако $AB=10$ cm, да се намери разстоянието от точка O до правата DC.

г) Да се докаже, че $MD+MC>2AD$.

Изпит за профил математика

Задача 1. Даден е изразът

$$A = x^2(a-2) - 2x(a+1)(a-2) - 4a(2-a).$$

а) Да се представи A като произведение от три множителя.

б) За кои стойности на параметъра a уравнението $A = 0$ има точно два различни корена?

в) Да се докаже, че ако $a = 3$ и $x > 6$, то $A > 0$.

г) За кои стойности на x е изпълнено неравенството $|A| > (x-2)^2$, ако $a = x$?

Задача 2. Между НПМГ и ЖК „Дружба“ е организирано движение с маршрутни таксита. Всяко от таксита изминава целия маршрут от НПМГ до ЖК „Дружба“ и обратно за 40 минути. На началната спирка на НПМГ никога не стои повече от едно такси.

а) Колко коли обслужват линията и колко минути е престоят в началната спирка, ако колите се движат през интервали от 7 минути?

б) Колко коли обслужват линията и колко минути е престоят в началната спирка, ако колите се движат през интервали от 7,5 минути?

Задача 3. За триъгълника ABC е известно, че $AB = AC$ и ъглополовящата CL от върха C, височината AH от върха A и симетралата на страната AC се пресичат в точка O.

а) Да се докаже, че триъгълникът ABC е равностранен.

Точките T и K са избрани съответно върху страните AB и AC така, че $BT = AK$.

б) Да се докаже, че ако N е пресечната точка на CT и BK, то $CT = BK$ и $\sphericalangle BNT = 60^\circ$.

в) Да се докаже, че ако точката M е средата на отсечката KT, то $CT = 2AM$.

2006 г.

Изпит за всички специалности

Задача 1. а) Решете уравнението

$$(3-2x)^2 - 12\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-x\right) = 2x+1-(3-2x)(8x+2).$$

б) Решете неравенството

$$\frac{x}{2} - \frac{3-x}{3} < 2x+1.$$

в) Проверете дали има число, което е решение едновременно на уравнението от подточка а) и на неравенството от подточка б).

Задача 2. Един билет за градския транспорт до 30 юни струвал 50 ст. От 1 юли цената на един билет се увеличила с 40%. Глобата на пътник без билет е равна на цената на 10 билета.

а) Намерете цената на един билет и глобата след 1 юли.

б) През месец юли Петър пътувал няколко пъти с билет и няколко пъти го глобили, понеже бил без билет. Той платил общо за билети и глоби 56 лева, като броят на билетите бил 6 пъти по-голям от броя на глобите. Пресметнете колко пъти са го глобили.

в) През месец август Петър е дал с 50% повече за глоби, отколкото за билети и е похарчил за билети и глоби по-малко от 50 лева. Колко билета най-много може да е купил?

Задача 3. В остроъгълния триъгълник ABC височината CH ($H \in AB$) и ъглополовящата BL ($L \in AC$) се пресичат в точка O. Известно е, че лъчът $OA^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle HOL$ и $AO = 2OH$.

а) Докажете, че триъгълникът ABO е равнобедрен.

б) Докажете, че триъгълникът ABC е равностранен.

в) Пресметнете отношението $LH : BC$.

Изпит за профил математика

Задача 1. Дадени са изразите

$$A = x^2 - 4x - 5, \quad B = \frac{810^{502}}{(-100)^{251} \cdot 3^{2006}}.$$

а) Докажете, че $A \geqq B$ за всяко x.

б) Разложете A на множители.

в) Намерете стойностите на x, за които

$$|A| < |35 - 7x|.$$

Задача 2. В един камион има 1000 литра минерална вода в три вида бутилки: по 5, по 7 и по 10 литра.

а) Покажете, че бутилките могат да се разпределят така, че всеки магазин да получи по 500 литра вода.

б) По колко бутилки има от всеки вид, ако общият им брой е 121, а броят на бутилките от 10 литра е най-голямото двуцифрено число, което дели 2006.

Задача 3. Даден е четириъгълникът $ABCD$. Диагоналите AC и BD се пресичат в точката T, а продълженията на страните AB и CD – в точка S.

а) Докажете, че ако $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDA = 60^\circ$ и $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BDC$, то $\sphericalangle ATB = 60^\circ$, $AC = BD$ и $AB + CD = AD$.

б) Докажете, че ако M и N ($M \neq N$) са средите съответно на AD и ST и $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = 90^\circ$, то $MN \perp BC$.

2007 г.

Изпит за профил математика

Задача 1. Дадени са изразите

$$A = (x+4)^3 - 4(x+4), \quad B = -(x+6), \quad C = Ax + 16.$$

а) Приведете A в нормален вид.

б) Представете A като произведение от три множителя.

в) Намерете всички стойности на x, за които $A = B$.

г) Докажете, че ако x е цяло число, то стойността на израза C е точен квадрат на цяло число.

Задача 2. Броят на сватбите на 7 юли 2007 година в една държава е със $71\frac{3}{7}\%$ по-малък от броя на сватбите в друга държава.

а) Намерете колко сватби има във всяка от двете държави в този ден, ако се знае, че общият им брой е 2007.

б) Намерете броя на гостите на една от сватбите, ако той е най-голямото трицифрено число, което е 34 пъти по-голямо от сбора на цифрите си.

Задача 3. Външните ъгли при върховете A, B и C на триъгълник ABC се отнасят съответно както $26 : 25 : 21$. Ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ и симетралата на страната AB се пресичат в точка O, а правата BO и страната AC се пресичат в точка M.

а) Изчислете мерките на вътрешните ъгли на $\triangle ABC$.

б) Докажете, че дължината на отсечката MB е равна на дължината на точно една от страните на триъгълника.

в) Намерете дължината на страната BC, ако разстоянието от точка M до нея е 7,25 cm.

г) Да се докаже, че $MA + MO < AB$.

2008 г.

Изпит за профил математика

Задача 1. Даден е изразът

$$A = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 - (2x+1)(1-2x) - 9{,}25.$$

а) Да се приведе A в нормален вид.

б) Да се пресметне числената стойност на при

$$x = \frac{(-64 : 0{,}25)^{251}}{2^{2008}}.$$

в) Да се намерят всички стойности на x, за които $A = 0$.

г) Да се намери най-голямото цяло число, за което $A \leqq 0$.

Задача 2. На планетата Зен паричната единица се нарича зен. Съществуват само два вида монети – златни и сребърни. Всяка златна монета има стойност 5 зена, а всяка сребърна – 3 зена.

а) Кои от сумите, по-малки от 16 зена, могат да се изплатят само в монети? Да се даде пример за всяка от тези суми.

б) Да се посочи един начин за изплащане на 2008 зена само в монети.

в) Да се докаже, че ако n е естествено число, по-голямо от 7, то сума от n зена може да се изплати само в монети.

Задача 3. Даден е квадрат $ABCD$ и вътрешни за него точки M и N, така че триъгълниците ABM и BCN са равнобедрени и $\sphericalangle AMB = \sphericalangle BNC = 150^\circ$. Да се докаже, че:

а) $AM = MN = NC$;

б) $\triangle MNC \cong \triangle AMB$;

в) $\triangle CDM$ е равностранен;

г) лицето на квадрата $ABCD$ е 4 пъти по-голямо от лицето на $\triangle ADM$.

2009 г.

Изпит за профил математика

Задача 1. Решете уравнението

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\right)-(x-1)^3-3(x-1)(1+x)=1\frac{1}{27}.$$

Задача 2. Намерете естественото число

$$A=\frac{41.21^{22}+123.7^{21}.9^{10}}{27^7.49^{10}+35.7^7.63^{11}}$$

и проверете дали е решение на неравенството

$$\left(2-\frac{x}{3}\right)^2-\frac{x}{1,2}<\left(\frac{x}{3}+2\right)^2+3,5x+3.$$

Задача 3. Решете уравнението

$$|ax-2-x|=4,$$

където a е параметър.

Задача 4. Родители на ученици от НПМГ решили да подарят на Гимназията компютри в 3 поредни дни. Първия ден подарили 30% от компютрите, втория ден — с 10% повече от подарените първия ден, а третия ден — с четири компютъра повече от подарените през втория ден. Намерете колко компютъра общо са подарени.

Задача 5. Сашо тръгнал от НПМГ за Общежитието и 30 минути по–късно забелязал, че е изминал половината от пътя и още 200 метра. Продължил да се движи със същата скорост и пристигнал в Общежитието след 24 минути. Намерете колко километра е разстоянието от НПМГ до Общежитието.

Задача 6. Даден е равнобедреният триъгълник ABC ($AC=BC$), в който $\sphericalangle BAC=80^\circ$. Точките M и N лежат съответно върху бедрата AC и BC така, че $\sphericalangle AMB=60^\circ$ и $\sphericalangle ANB=50^\circ$. Да се докаже, че правата BM е симетрала на отсечката AN.

Задача 7. Върху страните AD и CD на успоредника $ABCD$, с остър ъгъл при върха A, външно за него са построени квадратите $ADPQ$ и $CMND$. Да се докаже, че $BM \perp BQ$.

Задача 8. Даден е $\triangle ABC$, в който симетралата на страната BC пресича страната AB в точка M. Ако M е среда на AB, N е среда на BC и $MN = \frac{1}{4}AB$, намерете $\sphericalangle CAB$.

Задача 9. Дадени са два трапеца $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, за които е известно, че $CD = 1$ см, $A_1B_1 = 5$ см, $C_1D_1 = 3$ см. Дължината на AB е четно число и $AB > A_1B_1$. Дължините на височините DH ($H \in AB$) и D_1H_1 ($H_1 \in A_1B_1$) на двата трапеца са съответно 8 см и 15 см. Отношението на лицата $S_{A_1B_1C_1D_1} : S_{ABCD}$ е естествено число. Намерете дължината на AB.

Задача 10. Намерете всички двойки прости числа x и y, които удовлетворяват равенството

$$3x^4y + 8x^4 + 18x^2y + 48x^2 + 27y - 1937 = 0.$$

2010 г.

Вътрешен профилиращ изпит

Задача 1. Да се намери най-малкото цяло число, което е решение на неравенството:

$$(x+3)^2 - x(x-1)(x+1) \geq (x+2)(x-2) + (1-x)(x^2+x+1).$$

Задача 2. Да се реши уравнението:

$$2x(x^2+1)(x^2 - 2|2-2^2|) = 0.$$

Задача 3. Да се реши уравнението:

$$|(-x-1)^2 - x(x+1)| = 2M,$$

където

$$M = \frac{2^{2010} - (2^{502})^4}{4^{1004} + 2^{2009}}.$$

Задача 4. В три торби има общо 36 килограма брашно. Втората торба съдържа $\dfrac{9}{25}$ от количеството брашно в първата торба, а третата торба съдържа $\dfrac{22}{9}\%$ от количеството брашно във втората торба. По колко килограма брашно има във всяка торба?

Задача 5. Една обущарска фирма сключила договор с търговска фирма да ѝ предоставя по 180 чифта обувки на ден от даден модел. В действителност обущарската фирма произвеждала с 15 чифта обувки на ден повече от договореното, поради което един ден преди изтичане на договора тя произвела 120 чифта обувки над договореното количество. Колко чифта обувки е трябвало да произведе обущарската фирма по договор?

Задача 6. Даден е триъгълник $\triangle ABC$ с $\sphericalangle BAC = 30^\circ$, $\sphericalangle ABC = 45^\circ$, височина CH ($H \in AB$) и медиана BM ($M \in AC$). Да се намери големината на $\sphericalangle BMC$.

Задача 7. В правоъгълния триъгълник $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) височината е CD ($D \in AB$), ъглополовящата на $\sphericalangle BCD$ е CL ($L \in AB$). Точката M е средата на CL, а правата AM пресича CD и CB съответно в точките Q и S. Да се докаже, че четириъгълникът $CQLS$ е ромб.

Задача 8. Даден е тъпоъгълен триъгълник $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ABC > 90^\circ$), в който ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ пресича страната BC в точка M. Избрана е точка P от страната AC, така че $\sphericalangle PMC = \sphericalangle BAC$. Да се докаже, че $MP = MB$.

Задача 9. Да се докаже, че ако a, b и c са дължините на страните на триъгълник, то е изпълнено неравенството

$$a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2.$$

Задача 10. Докажете, че уравнението

$$x^2 + 2010 = y^2$$

няма решение в цели числа.

2011 г.

Вътрешен профилиращ изпит

Задача 1. Намерете числената стойност на израза

$$3c + cb - c^2 + b^2 + b^3c^2 - c^5$$

за $c = b = -3$.

Задача 2. Да се реши уравнението

$$\frac{4-x}{-4} + \frac{2x-15}{3} = \frac{3x+4}{8}.$$

Задача 3. Да се реши уравнението

$$|(-2x+1)^2 - x(4x-5)| = B,$$

където $B = \dfrac{2^{n+3}}{2^n + 2^n + 2^n + 2^n}$ $(n \in \mathcal{N})$.

Задача 4. Да се докаже, че ако a е най-малкото цяло решение на неравенството

$$\frac{9x+5}{4} - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{3-2x}{9}\right) - 7x < 0,$$

то неравенствата

$$(12x + a)(a - x) + (3x-2)^2 - 3x(7-x) + 17a < 0$$

и $x > 1$ са равносилни.

Задача 5. В $\triangle ABC$ е построена ъглополовящата AL. Правата през L, която е успоредна на AC, пресича страната AB в точка P. Да се намерят ъглите на $\triangle ABC$, ако $\sphericalangle APL = 130^\circ$ и

$$\sphericalangle ACB : \sphericalangle ABC = 3 : 2.$$

Задача 6. Два бегачи се движат по квадрат $ABCD$ в различни направления с постоянна скорост. Когато стартират от върха A, единият достига B, когато другият достига C, без да са се срещали. Ако страната на квадрата е 30 m, то на колко метра е равно разстоянието от точката на срещата им до върха B?

Задача 7. Две фирми произвеждат общо 720 чифта обувки на ден. Първата фирма увеличава дневната си производителност с 15%, втората с 10% и те вече произвеждат общо 807 чифта обувки за един ден. Да се намери по колко чифта обувки на ден произвежда всяка от фирмите, след като са увеличили производителността си.

Задача 8. Да се докаже, че за всяко естествено число n числото

$$m = \frac{10^n + 65}{15}$$

е цяло.

Задача 9. Даден е квадратът $ABCD$. Построени са равностранните триъгълници ABF и CDT по такъв начин, че F и T са вътрешни точки за квадрата. Ако M и N са съответно средите на AD и BC, да се докаже, че $MTNF$ е ромб.

Задача 10. В правоъгълния триъгълник ABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) са прекарани ъглополовящите BD и AT. Отсечките DK и TM са перпендикулярни на хипотенузата AB ($K, M \in AB$). Да се намери $\sphericalangle KCM$.

2012 г.

Вътрешен профилиращ изпит

Задача 1. Да се реши уравнението:

$$|x| = 2012 - 2011 + 2010 - 2009 + \cdots + 2 - 1.$$

Задача 2. В магазин продали на един купувач 25% от наличното в магазина сирене, на втори купувач – 30% от останалото сирене, а на трети – 40% от новия остатък. Колко процента от първоначалното количество сирене останали непродадени?

Задача 3. Решете неравенството:

$$\frac{x(x-5)}{4} - 2 > \frac{3x(x+1)}{2} - \frac{5x^2}{4}$$

и проверете дали числото

$$M = \frac{-2^3 \cdot 4^3}{22 \cdot 2^2 \cdot (-4)^2}$$

е негово решение.

Задача 4. Докажете, че ако ъглополовящата на даден ъгъл в триъгълник го разделя на два равнолицеви триъгълника, то триъгълникът е равнобедрен.

Задача 5. В правоъгълния триъгълник $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) симетралата на катета AC и ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ се пресичат в точка M. Ако хипотенузата AB има два пъти по-голяма дължина от катета AC, намерете мярката на $\sphericalangle MCB$ в градуси.

Задача 6. За да изпълни една поръчка за ушиване на мъжки панталони в определен срок, шивашко ателие трябвало да шие по 45 панталона дневно. След два дни работа шивачите увеличили дневната си производителност с 5 панталона, поради което за определения срок ушили 100 панталона над плана. Намерете колко панталона трябвало да се ушият по план.

Задача 7. Разгледайте следните две твърдения:

I. В правоъгълника диагоналите са равни.

II. Ако в един четириъгълник диагоналите са равни, той е правоъгълник.

За всяко от двете твърдения определете дали е вярно или не. Ако е вярно — го докажете, а в противен случай — го опровергайте с пример.

Задача 8. Даден е правоъгълен триъгълник $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$). Външно за триъгълника са построени правоъгълните равнобедрени триъгълници $\triangle ACP$ и $\triangle BCQ$ с хипотенузи съответно AC и BC. Ако точка M е среда на страната AB, да се докаже, че $\triangle PMQ$ е равнобедрен и правоъгълен.

Задача 9. Намерете всички двойки прости числа x и y, които удовлетворяват равенството:

$$5xy^2 - 2y^2 - 10xy + 5x + 4y = 2014.$$

Задача 10. Да се докаже, че произведението на четири последователни естествени числа, увеличено с единица, е точен квадрат на естествено число.

2013 г.

Вътрешен профилиращ изпит

Задача 1. Решете уравнението

$$\frac{x(x+3)}{2} = x - \frac{(3x-1)(2-x)}{6}.$$

Задача 2. Решете уравнението $\Big|4 - |x|\Big| = A$, където

$$A = \frac{(-2)^{2013} + 5 \cdot 2^{2012}}{2^{2011} + 4^{1005}}.$$

Задача 3. Намерете най-малкото цяло число, което е решение на неравенството

$$(2-x)^3 - x(3-x)(3+x) - \frac{2(3x+1)^2+1}{3} < 27.$$

Задача 4. В успоредника $ABCD$ ъглополовящата на $\sphericalangle DAB$ пресича страната CD в точка T и продължението на страната BC в точка M. Ако $DT = 5$ см и $CM = 2$ см, намерете периметъра на $ABCD$.

Задача 5. За да изоре дадена площ в определен срок, тракторист трябвало да изорава по 20 декара на ден. Той решил да изорава с 20% повече от определената норма и в резултат на това 3 дни преди определеното време изорал $\dfrac{4}{5}$ от цялата площ.

Да се намери колко декара е цялата площ.

Задача 6. Даден е $\triangle ABC$, в който $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. През средата M на AC е построен перпендикуляр към AC, който пресича AB в точка P така, че $\sphericalangle ACP : \sphericalangle PCB = 3:2$. Ако $BP = 3$ cm, намерете дължината на страната BC.

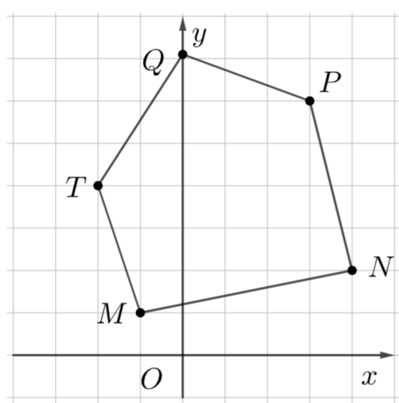
Задача 7. Решете уравнението

$$(1-2a)^2x - a^2(4x-5) = 0,$$

където a е параметър. Намерете за кои стойности на a то има положителен корен.

Задача 8. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$) и точка O е вътрешна за триъгълника. През точката O е построена права m, успоредна на BC, която пресича AC в точка M и AB в точка K. Ако $ON \perp BC$ ($N \in BC$), $OM = ON$ и $\sphericalangle CAN = \sphericalangle BNK$, намерете ъглите на $\triangle ANK$.

Задача 9. В координатна система с единична отсечка a см са дадени точките M, N, P, Q и T, както е показано на чертежа. Лицето на петоъгълника $MNPQT$ е 98 см^2. Намерете a и пресметнете лицето на четириъгълника, чиито върхове са точките $A(-4a; -2a)$, $B(4a; -2a)$, $C(6a; 7a)$ и $D(-2a; 7a)$.



Задача 10. Ако x, y и z са цели положителни числа такива, че $x < y < z$ и

$$x^3 + x^2z + x^2y + xyz + x^2 + xz + yz + xy = 2013,$$

намерете x, y и z.

2014 г.

Вътрешен профилиращ изпит

Задача 1. Намерете най-голямото цяло число, което е решение на неравенството

$$\frac{(x-1)(x+1)}{2} - \frac{(x+2)^2}{3} \geqq \left(\frac{x}{2} - 3\right)\left(\frac{x}{3} + 2\right).$$

Задача 2. Решете уравнението

$$|9x^2 + 5 - (3x+2)^2| - 5|1 - 12x| = -12.$$

Задача 3. В $\triangle ABC$ е дадено, че

$$\sphericalangle BAC : \sphericalangle ABC : \sphericalangle ACB = 2 : 4 : 3.$$

Ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ и симетралата на страната AB се пресичат в точка M. Правата BM пресича страната AC в точка N . Ако $BC = 6$ cm, то намерете периметъра на $\triangle BCN$.

Задача 4. В двора на НПМГ има тенис корт с формата на правоъгълник с дължина 2 пъти по-голяма от неговата ширина и футболно игрище с правоъгълна форма, което има ширина равна на дължината на тенис корта и дължина с 10 метра по-малка от обиколката на тенис корта. Ако площта на футболното игрище е 5 пъти по-голяма от площта на тенис корта, намерете колко квадратни метра е общата площ на двете спортни площадки.

Задача 5. Даден е успоредник $ABCD$ ($\sphericalangle ABC > 90^\circ$) с височина $CH \perp AB$, за която е известно, че $CH = BH$. Намерете $\sphericalangle ABD$, ако $\sphericalangle BAC : \sphericalangle CAD = 2 : 1$.

Задача 6. За патронния празник на НПМГ било възложено на фирма за рекламни материали да изработи определен брой ключодържатели с логото на училището. За да изпълнят поръчката в срок работниците във фирмата трябвало да произвеждат по 50 ключодържателя дневно. Първия ден работниците от фирмата произвели

50 ключодържателя, а през останалите дни те увеличили дневната си производителност с 20%, в резултат на което изпълнили поръчката един ден предсрочно. От колко ключодържателя се е състояла поръчката?

Задача 7. Дадени са два правоъгълни триъгълника ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$) и ABD ($\sphericalangle D = 90^\circ$), като точките C и D са в различни полуравнини относно правата AB. Ако $AD = BD$, $\sphericalangle ABC = 33\frac{1}{3}\% \sphericalangle ABD$ и $AB = 13$ cm, намерете разстоянието от средата M на хипотенузата AB до CD.

Задача 8. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ с $\sphericalangle ACB = 130^\circ$. Симетралата на страната AC пресича правата BC и страната AB съответно в точки P и Q. Докажете, че периметърът на триъгълника PQC е по-малък от периметъра на триъгълника BCQ.

Задача 9. За откриването на спортен празник учениците от седми клас на едно училище трябва да се строят в няколко редици. Ако се строят по 6 ученици в редица, то последната ще остане непълна. Ако се строят по 9 ученици, ще се образуват 4 редици по-малко, но всички редици ще бъдат пълни. Колко седмокласници от това училище участват в спортния празник?

Задача 10. Върху ъглополовящата AL на правоъгълния триъгълник ABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$, $L \in BC$) е взета точка D така, че $CD = CA$. Ако $AL = 2LD$ и $AB = 10$ cm, намерете периметъра на $ABDC$.

2015 г.

Вътрешен профилиращ изпит

Задача 1. Пресметнете

$$\frac{(-15)^4 \cdot 21^4}{175 \cdot (-7)^3 \cdot ((-3)^3)^2}.$$

Задача 2. На колко е равен коефициентът пред едночлена от първа степен в нормалния вид на израза

$$(x+3)^2 - 2(x-1)(x^2+x+1) - 2(x-2)^3?$$

Задача 3. Даден е успоредник $ABCD$, в който AL $(L \in CD)$ е ъглополовяща на $\sphericalangle DAB$ и $\sphericalangle ALC = 145^\circ$. Намерете $\sphericalangle ABC$.

Задача 4. Върху страната BC на $\triangle ABC$ е взета точка D така, че $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACD$. Ако периметрите на триъгълниците ABC и ABD са равни съответно на 38 cm и 26 cm, намерете дължината в сантиметри на AC.

Задача 5. В остроъгълния $\triangle ABC$ ъглополовящата AL $(L \in BC)$ пресича височината CH $(H \in AB)$ в точка O, а правата CH пресича ъглополовящата на външния ъгъл при връх A в точка P. Ако $\sphericalangle BAC = 70^\circ$, намерете $\sphericalangle APO$.

Задача 6. Строителна фирма построила една сграда за 50 дни. Тя увеличила производителността си с 20% и построила друга сграда за 25 дни. За колко дни общо фирмата щеше да построи двете сгради, ако при построяването им беше работила с производителност, която е с 20% по-малка от тази за първата сграда?

Задача 7. Намерете най-голямото цяло число, което е решение на неравенството

$$2(x-2)(x^2+2x+4) - 3(x-1)^3 > (3x-1)^2 - x(x-5)(x+5).$$

Задача 8. В един съд в 6000 g вода са разтворени 550 g захар, а в друг съд в 600 g вода са разтворени 900 g захар. Колко разтвор трябва да се прелее от втория съд в първия, за да се получи разтвор, в който захарта е 5 пъти по-малко от водата?

Задача 9. В успоредника $ABCD$ е дадено, че $AB = 10\,\text{cm}$, $\sphericalangle BAD = 45^\circ$, $\sphericalangle BAC = 15^\circ$. Точка N лежи на правата AB и $BC = NC$, точка M лежи на правата BC и $AM = AB$, а точка H е средата на MN. Докажете, че $\triangle MND$ е равнобедрен и намерете периметъра на $\triangle CDH$.

Задача 10. Намерете целите стойности на x и y, за които е изпълнено равенството

$$2x^5y - 6x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2x^2y^4 - x^5 + 3x^4y - 3x^3y^2 + x^2y^3 - 1 = 2015.$$

2016 г.

Вътрешен профилиращ изпит

Задача 1. Пресметнете:

$$\frac{14^{10} \cdot (-6^6)}{(-7^5)^2 \cdot (-18)^3 \cdot 4^5}.$$

Задача 2. Решете уравнението:

$$\frac{2x-3}{3} - \frac{1}{5}\left(\frac{x-2}{2} + x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4x-3}{5} + \frac{x-14}{15}\right).$$

Задача 3. В триъгълник ABC височината $AH = 3\,\mathrm{cm}$ и

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB + 120^\circ.$$

Намерете дължината на ъглополовящата AL.

Задача 4. Към 30 kg сплав, съдържаща никел и желязо в отношение $2:3$, е добавена друга сплав, съдържаща никел и желязо в отношение $3:7$, и е получена сплавта *инвар*, в която никелът и желязото са в отношение $9:16$. Колко килограма са добавени от втората сплав?

Задача 5. В правоъгълен триъгълник ABC хипотенузата AB е равна на 5 cm и $\sphericalangle BAC = 75^\circ$. Външно за триъгълника е построен квадрат $ABPQ$ с пресечна точка на диагоналите O. Намерете разстоянието от средата M на хипотенузата до правата CO.

Задача 6. В триъгълник ABC са построени перпендикулярите от върха C към външните ъглополовящи при върховете A и B, които пресичат правата AB съответно в точките M и N. Намерете страните на $\triangle ABC$, ако е дадено, че

$$MN = 2016, \quad MA = \frac{20}{21} \cdot AB, \quad AB = \frac{21}{22} \cdot BN.$$

Задача 7. Разстоянието между речните пристанища A и B е 60 km. В 9:00 ч. от A към B тръгнал сал, а едновременно с него от B към A тръгнал катер. В 12:00 ч. катерът срещнал сала и продължил към A. След престой от 45 минути в A, катерът тръгнал обратно към B. В колко часа катерът е настигнал сала, ако скоростта на течението е 4 km/h?

Задача 8. Да се намери най-малкото цяло число, което е решение на неравенството:

$$(2-x)^3 + (x^2 - 3x + 9)(x + 3) < 6(x + 2)^2 - 1.$$

Задача 9. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза AB и $\sphericalangle ABC = 30^\circ$. Точка M е средата на AB, а N — средата на BC. Ъглополовящите на $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ACB$ се пресичат в точка O, а ъглополовящата на $\sphericalangle ABC$ пресича MN в точка P. Правата MO пресича страната AC в точка Q. Да се докаже, че $QM = BP$.

Задача 10. Намерете най-малката стойност на израза

$$A = x^2 + 6y^2 - 2xy - 8x - 22y + 70.$$

За кои стойности на x и y се постига тя?

Отговори

<u>**1967 г.**</u> **1.** $(x, y, z) \in \{(3,5,7), (3,7,5)\}$; **2.** 15 h.

<u>**1968 г.**</u>**1.** 3672; **2.** Да се докаже, че $(a-z)(a-y(a-x)=0$.

<u>**1969 г.**</u> **3.** а) А и Б са мултипликативни, а В не е; б) съществуват поне две числа $x, y \in M$, за които $xy \notin M$.

<u>**1970 г.**</u> **1.** 80 лв., първият плат е по-скъп от втория; **2.** Петър е пристигнал пръв на финала.

<u>**1971 г.**</u> **2.** б) Геометричното място е отсечката NQ, където N е средата на отсечката AC, а Q– среда на отсечката AD; **3.** $x = 10a$, $y = 5b$ или $x = 10n + 2$, $y = 5k - 2$ $(a, b, n, k \in \mathcal{Z})$.

<u>**1972 г.**</u> **1.** 1, 9, 17 или 25; **3.** б) $ABCD$ е трапец или успоредник.

<u>**1973 г.**</u> **1.** $a = 3$.

<u>**1974 г.**</u> **1.** $x = 820$, $y = 164$.

<u>**1975 г.**</u> **1.** $(x, y) \in \{(729,1), (27,27), (81,9), (243,3)\}$.

<u>**1976 г.**</u> **1.** 630, 135, 765; **2.** (0,5; 5,5), (1,5; 5,5).

<u>**1977 г.**</u> **1.** 594.

<u>**1978 г.**</u> **1.** 350.

<u>**1979 г.**</u> **1.** 7, 3, 1; **2.** а) $(-\infty; 0)$; б) $(-\infty; 0{,}6)$.

<u>**1980 г.**</u> **1.** а) $x = \dfrac{5b-3a}{8}$, $y = \dfrac{7a-9b}{8}$; б) $a = 14$, $b = 10$; в) $x = y = 1$; **2.** 4761; **3.** Извън диагонала BD всяка от петте цифри участва четен брой пъти.

<u>**1981 г.**</u> **1.** а) $m \in [2 + 4\sqrt{2}; \infty)$; б) $m = -4$, $n = 1$; в) $\dfrac{(x-1)(x+2)}{x+1}$; г) $D > 0$ за всяко a; **2.** $4913 = 17^3$; **3.** $\dfrac{4h^2\sqrt{3}}{3}$.

<u>**1982 г.**</u> **1.** а) $f(x) = 2x^2 - 2|x| + 1$; б) $(\pm 0{,}5; 0{,}5)$.

<u>**1983 г., 8. клас**</u> **1.** При $a > 4$: $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm a}{4}$, при $a = 4$: $x \in [-0{,}5; 1{,}5]$; при $a < 4$: няма решение; **3.** 40 литра.

<u>1983 г., 9. клас</u> 1. а) $\left(\dfrac{a^2-b^2-2ab}{ab}\right)^2$; б) $\dfrac{a+b}{a}\cdot\dfrac{a-b}{b}$; **2.** $\dfrac{3}{4}$; **3.** $\dfrac{ab^2}{a+b}$.

<u>1984 г.</u> 1. При $a>3$: $x_{1,2}=\pm\dfrac{a}{3}$, при $a\in[2;3]$: $x=\pm(a-2)$; при $a<2$: няма решение. Единствено решение $x=0$ се получава при $a=2$; **2.** 20 g, 6 g, 3 g.

<u>1985 г.</u> 2. а) Скоростта на автобуса е два пъти по-голяма от скоростта на колоездача; б) скоростта на леката кола е три пъти по-голяма от скоростта на колоездача; **3.** 120°.

<u>1986 г.</u> I. 1. При $a\neq 0,\pm\dfrac{1}{3}$: $x=\dfrac{3}{3a-1}$, при $a=-\dfrac{1}{3}$: всяко $x\neq -3$; при $a=0$ или $\dfrac{1}{3}$: няма решение; **2.** $\overset{\frown}{BD}=80^\circ$, $\overset{\frown}{CD}=60^\circ$, $\overset{\frown}{BC}=220^\circ$; **3.** Отбор A печели мача с резултат 6 : 3. **II. 1.** $A=1$; **2.** M – среда на отсечката BC; **3.** 3 h.

<u>1987 г.</u> I. 1. 13,5 m/s, 18 m/s; **2.** а) $x=\dfrac{3-4a}{2}$, $a\neq\dfrac{5}{6}, a\neq\dfrac{1}{2}$; б) $a\in\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{6}\right)\cup\left(\dfrac{5}{6};\infty\right)$. **II. 3.** 1296.

<u>1988 г.</u> I. 1. а) $(x-1)(x+1)^3$; б) ±1; в) $f(-3)=32$; **2.** 6 km/h, най-малко със 7,2 km/h; **3.** $\vec{OA}=-\dfrac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{CD}=-\dfrac{2}{5}\vec{a}$, $\vec{BC}=\vec{b}-\dfrac{3}{5}\vec{a}$, $\vec{AC}=\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{a}$. **II. 2.** 16 h 45 min, 6 km; **3.** а) $(x-1)(x+5)(x+6)$; б) $B_{min}=3$ при $a=\pm1$.

<u>1989 г.</u> I. 1. а) -8; б) 0; в) $a\leqq -1$, $a\in\mathcal{Z}$;
г) $a\in\{\pm1;\pm2;\pm3,\pm4,\pm6,\pm12\}$; д) $a\in\{1,2,3,4,6,12\}$; **2.** 56 дни, най-много 1672 машини; **3.** $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$, 48 cm^2. **II. 1.** (1) При $a\neq -2$: $x=\dfrac{a-2}{a+2}$, при $a=-2$: няма решение; (2) $x=-1$ е най-голямото цяло отрицателно решение; (3) $a=4$; **2.** 132; **3.** $MNPQ$ е успоредник.

<u>1990 г.</u> I. 1. 60 km; **2.** а) $a=0$; б) 0 и $-\dfrac{12}{31}$; в) 0; **3.** б) 17 cm, 20 cm. **II. 1.** Иван – 14, Петър – 26, Стоян – 50.

<u>1991 г.</u> I. 1. б) $(-4;0)$, $(0;4)$; в) $x=5$; г) при $a=1$ всяко x е решение, при $a=-1$ няма решение, при $a\neq\pm1$, $x=\dfrac{1-4a}{a+1}$; **2.** Синът е на 3

години. След 18 години бащата ще е 2 пъти по-възрастен от сина си; **3.** в) $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$.
II. 1. 15 min; **2.** а) $(b-3)(2b+1)$; б) 5.

<u>1992 г.</u> I. 1. а) $f(x) = \frac{1}{4}$; б) $\frac{21}{8}$, $\frac{19}{8}$; в) при $a = 3$ всяко x е решение, при $a \neq 3$, $x = -2$; г) 3; д) $(0; 0{,}25)$, $(0; 5)$, $(2{,}5; 0)$; **2.** 90 лв. и 135 лв.; **3.** а) $\sphericalangle ABC = 30^\circ$, $\sphericalangle ACB = 75^\circ$; б) $2a$. **II. 1.** б) $6(x+2)^2$; г) $x_1 = 2$, $x_2 = -6$; **2.** а) 23 h 45 min; б) $\frac{20(a-1)}{5a-4}$ при $a > 1$.

<u>1993 г.</u> I. 1. А. а) $x = \frac{1}{3}$; б) 0 и 1; в) $\frac{11}{3}$; Б. при $k > \frac{1}{3}$: $x \geqq \frac{6}{3k-1}$, при $k < \frac{1}{3}$: $x < \frac{6}{3k-1}$; **2.** а) 63; б) 1, 3, 7, 21, 63; в) 963, 936, 639, 693, 369, 396, 306, 360, 603, 630; **3.** Б. 135°. **II. 1.** г) $y_{max} = y(1) = 0$; д) $y_{min} = y(-2) = -3$; **2.** г) 2 km/h; **3.** Б) 4.

<u>1994 г.</u> I. 1. а) $A(x) = 4(2x-5)$, $B(x) = \frac{2x-1}{2}$, $C = 4{,}5$; б) няма решение; в) $x = 5{,}5$; г) $x_1 = 2{,}5$, $x_2 = 5$; д) $x \leqq -1{,}7$; ж) 49 кв.ед.; **2.** а) 7,20 лв.; б) 5 кг; в) 13 кг храна и остава 1,1 кг слънчогледово семе; **3.** 60°, 60°, 120°, 30 cm. **II. 1.** а) при $b = 2$: всяко x е решение; при $b = -2$: няма решение; при $b \neq \pm 2$: $x = \frac{b}{b+2}$; б) $b \in \{-4; -3; -1; 0; 2\}$; в) $b = -2$, неравенството няма решение; **2.** а) $A : B = 2 : 1$ и $A : B = 3 : 6$ или $A : B = 4 : 2$ и $A : B = 2 : 4$ или $A : B = 6 : 3$ и $A : B = 1 : 2$; б) $A : B = 2 : 1$ или $A : B = 2 : 4$.

<u>1995 г.</u> I. 1. а) $\sphericalangle BAC = 90^\circ$; $\sphericalangle ABC = 75^\circ$; $\sphericalangle ACB = 15^\circ$; б) $\sphericalangle BAM = 75^\circ$; $\sphericalangle CMA = 150^\circ$; **2.** а) $f(x) = 2x(x-a)$, $g(x) = 3ax(x+a)$; б) при $a \neq \frac{2}{3}$: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2a+3a^2}{2-3a}$; при $a = \frac{2}{3}$: няма решение; в) началото на координатната система е от графиката на $t(x)$; **3.** а) 184 km; б) 20 min. **II. 1.** а) $x > -\frac{7}{15}$; б) при $a > \frac{1}{3}$: $x < \frac{a-2}{3a-1}$; при $a < \frac{1}{3}$: $x > \frac{a-2}{3a-1}$; при $a = \frac{1}{3}$: няма решение; г) $x_1 = \frac{7}{9}$, $x_2 = -\frac{1}{9}$; **2.** 400 литра в първата детска градина и 350 литра във втората; **3.** б) $\sphericalangle DCB = 60^\circ$, $S_{ABCD} : S_{ABH} = 8 : 1$ или

$\sphericalangle DCB = 30^\circ$, $S_{ABCD} : S_{ABH} = 8 : 3$.

<u>1996 г.</u> I. 1. б) $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{4}{3}$; в) $k = 0$; **2.** а) 60; б) най-много 28 гривни. **II. 1.** а) $f(x) = 2x - 2$; б) няма решение; в) при $a = 0$ двете уравнения са еквивалентни; **2.** в) 18 cm^2; **3.** а) 9:30; б) 12:55, 13:20, 15:42, 17:42.

<u>1997 г.</u> I. 1. а) $A = x - 1$, $B = 4x + 6$; б) $x_1 = 1$, $x_2 = -1{,}5$; в) $x < -\dfrac{7}{3}$, $a = -\dfrac{9}{4}$ не е решение; **2.** а) 30 kg; б) 14 kg; **3.** а) 14 cm.

II. 1. а) $(t-3)(t+1)$; б) $(x-3)(x+1)(x-1)^2$; в) -5, 7; **2.** а) 1 h 15 min; б) 58.

<u>1998 г.</u> I. 1. а) $x = 0{,}5$; б) $x > -2{,}25$; **2.** а) $(x - 2y - 3)(x - 2y + 3)$; б) $\dfrac{32}{9}$; **3.** 160000 лв.; **4.** б) $54^\circ, 54^\circ, 72^\circ$ или $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$; **II. 1.** а) при $a = 2$: всяко x е решение; при $a = -2$: няма решение; при $a \pm 2$: $x = -\dfrac{1}{a+2}$ б) -1, -3; в) 2, -3; **2.** 1746 бели пилета; **3.** в) 24 cm.

<u>1999 г.</u> I. 1. а) $A = x^2 - x - 2$, $B = x + 8$; б)$C = -27$, $x = -35$; в) $x \in (-1; 2)$, $x \in \{0; 1\}$; **2.** а) 17,5 km/h, 70 km; б) най-много 12 km; **3.** б) 25 cm^2. **II. 1.** б) $A = 2$, $B = \dfrac{81}{17}$ или $A = -2$, $B = \dfrac{1}{17}$; в) $\pm 1, \pm 2$; **2.** 15 вагона: 5 вагона с по 2 големи и 10 малки контейнера и 10 вагона с по един голям и 21 малки контейнера; **3.** в) 30 cm.

<u>2000 г.</u> I. 1. а) $x^3 - 2x^2 - x + 2$; б) $(x-1)(x+1)(x-2)$; в) $x \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$; **2.** а) 18; б) 25; **3.** а) 135°. **II. 2.** а) 400; б) 3355.

<u>2001 г.</u> I. 1. $A = x^2 - 6x + 9$, $B = 4x^2 + 4x + 1$; а) 3 и $-0{,}5$; б) $x < 1{,}25$; в) $\dfrac{2}{3}$ и -4; **2.** а) 27; б) 6 дни, 250 страници. **II. 1.** $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_{1,2} = a \pm 1$, само при $a = 1$ двете уравнения са еквивалентни; **2.** б) 15 km; в) 9 km; **3.** а) $\sphericalangle PMK = \dfrac{\alpha}{2}$; г) $30^\circ, 120^\circ, 30^\circ$.

<u>2002 г.</u> I. 1. а) $A = 26 - 20x$, $B = x + 2$, $x = \dfrac{8}{7}$; б) $x_1 = 1$, $x_2 = -5$; в) $x \in (-2; 1{,}3)$; **2.** а) 2620; б) 1 210 000 лв.; **3.** а) $\sphericalangle BMC = 112^\circ 30'$, $\sphericalangle CDM = 22^\circ 30'$; в) 3 cm. **II. 1.** а) -1 и 3; б) 1,5; в) $a \in (1; 3)$;

2. а) $2^5(n-5)$; б) $n = 11$; **3.** в) да се построи точка $D \in CA^{\rightarrow}$, $CD = CB$.

__**2003 г.**__ **I. 1.** а) $A = 2x-1$, $B = 4x^2+4x+1$; б) $x =$0,5; в) 0,5 и 0,75; г) 0,375 и 0,625; **2.** 800; **3.** а) $30°, 120°, 30°$. **II. 1.** а) 6; б) $a \in (1;\infty)\cup\{-1\}$; **2.** а) 12:48; б) 13:15; **3.** б) ако $CM \cap AB = P$, то $\triangle AMP \cong \triangle CDM$ и OM е медиана в правоъгълния $\triangle BOP$.

__**2004 г.**__ **I. 1.** а) $A = 2x^2+5x+3$; $B = x^2-4$; б) $-2{,}2$; в) -1; г) -2; $-1{,}5$; -1; 2; **2.** а) 1080; б) 1837. **II. 1.** а) При $a = -\dfrac{1}{3}$ всяко x е решение, при $a = \dfrac{1}{3}$ няма решение, при $a \neq \pm\dfrac{1}{3}$, $x = \dfrac{1}{3a-1}$; б) $a \in \left\{-\dfrac{1}{3}\right\} \cup \left(\dfrac{1}{3};\infty\right)$; в) няма решение при $a = \dfrac{1}{3}$; **2.** 390625.

__**2005 г.**__ **I. 1.** а) $x \leqq -0{,}5$; б) $a = -0{,}4$ не е решение, а $b = -0{,}5$ и $c = -0{,}6$ са решения; **2.** а) 21; б) 19. **3.** в) 2,5 cm; г) Ако се построи успоредник $CMDP$, то $MP < MD + DP$.
II. 1. а) $A = (a-2)(x-2)(x-2a)$; б) $a \neq 1$, $a \neq 2$; в) $x \in (-\infty;-1) \cup (1;2) \cup (2;\infty)$; **2.** а) 6 коли, престой 2 min; б) 6 коли, престой 5 min.

__**2006 г.**__ **I. 1.** а) $-1\dfrac{5}{6}$; б) $x < -1\dfrac{5}{7}$; в) няма такова число; **2.** а) 0,7 лв. и 7 лв.; б) 5; в) 20; **3.** $LH : BC = 1 : 2$. **II. 1.** б) $(x+1)(x-5)$; в) $x \in (-8;5) \cup (5;6)$; **2.** а) 2 по 5 L, 70 по 7 L, 50 по 10 L; б) 12 по 5 L, 50 по 7 L, 59 по 10 L.

__**2007 г.**__ **1.** а) $A = x^3+12x^2+44x+48$; б) $A = (x+2)(x+4)(x+6)$; в) $x_1 = -6$, $x_2 = -3$; г) $C = (x^2+6x+4)^2$; **2.** а) 446, 1561; б) 408; **3.** а) $50°, 55°, 75°$; б) $MO = BC$; в) $MB = BC = 14{,}5$ cm; г) ако $N \in AB^{\rightarrow}$, $AN = AM$, то $MO = NO$ и от $\triangle BON$ следва $NO < NB$.

__**2008 г.**__ **1.** а) $8x^2-2x-10$; б) $A = 0$, $x = -1$; в) -1; 1,25; 2; г) $x = 1$; **2.** а) Не могат да се изплатят само 1, 2, 4 и 7 зена; б) 2008 = 401.5+3.1.

__**2009 г.**__ **1.** 1; **2.** $A = 2009$ е решение; **3.** при $a = 1$ няма решение, при $a \neq 1$, $x_1 = \dfrac{6}{a-1}$, $x_2 = \dfrac{-2}{a-1}$; **4.** 100; **5.** 3,6 km; **9.** 14 cm; **10.** $x = 2$, $y = 11$.

__**2010 г.**__ **1.** -1; **2.** $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$; **3.** $x_1 = 1$, $x_2 = -3$; **4.** 25 kg, 9 kg, 2 kg; **5.** 3780; **6.** 45°.

<u>2011 г.</u> **1.** 0; **2.** 12; **3.** $x_1 = 1$, $x_2 = -3$; **4.** $a = 1$; **5.** $\sphericalangle A = 50^\circ$, $\sphericalangle C = 78^\circ$, $\sphericalangle B = 52^\circ$; **6.** 10; **7.** 345, 462; **10.** 45°.

<u>2012 г.</u> **1.** ± 1006; **2.** 31,5%; **3.** M не е решение на неравенството; **5.** 60°; **6.** 990; **7.** I е вярно, II не е вярно; **9.** $x = 101$, $y = 3$.

<u>2013 г.</u> **1.** 0,2; **2.** $x_1 = 0$, $x_2 = 8$, $x_3 = -8$; **3.** 0; **4.** 24 cm; **5.** 18 dka; **6.** 6 cm; **7.** $a > 0{,}25$; **8.** $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$; **9.** 288 cm^2; **10.** $x = 2$, $y = 9$, $z = 59$.

<u>2014 г.</u> **1.** 3; **2.** $-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$; **3.** 18 cm; **4.** 1200 m^2; **5.** 105°; **6.** 350; **7.** 3,25 cm; **9.** 63; **10.** 25 cm.

<u>2015 г.</u> **1.** -225; **2.** -18; **3.** 110°; **4.** 12 cm; **5.** 35°; **6.** 100 дни; **7.** -1; **8.** 1250 g; **9.** 30 cm; **10.** $x = 6$, $y = 4$.

<u>2016 г.</u> **1.** 8; **2.** $-0{,}5$; **3.** 6 cm; **4.** 20 kg; **5.** 1,25 cm; **6.** $AB = 672$ cm, $AC = 640$ cm и $BC = 704$ cm; **7.** катерът е настигнал сала в 14 h 24 min; **8.** най-малкото цяло число, което е решение на неравенството, е 1; **10.** най-малката стойност на A е 9, при $x = 7$, $y = 3$.

Съдържание